التحليل العقدي ١

نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الأولى ◄ عنوان المحاضرة: مفاهيم عقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ مقدمة عن سبب ظهور الأعداد العقدية.

٢ـ تعريف مجموعة الأعداد العقدية.

٣ـ جبر الأعداد العقدية.

مقدمة عن مجموعة الأعداد العقدية:

تعريف التابع الحقيقي: هو دالة مستقرّها $\mathbb{R}$ أو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ لأننا صراحةً لا نعلم ما هو المنطلق فيمكن أن يكون $\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{N}$ أو $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$.

((وقولنا عن دالة حقيقية نقصد أن مستقرها هو مجموعة الأعداد الحقيقية))

- في الحقيقة إن أول مجموعة عددية عرفها الإنسان هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ و بعد ذلك تم اكتشاف المجموعات الأخرى نظرا لأن الأعداد الطبيعية لا تلبي كل الإحتياجات الرياضية.

لنتابع كيف تم توسيع المجموعات:

بدأت الفكرة بملاحظة أن المعادلة $x - 5 = 0$ لها حل في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ وهو $x = 5$

لكن عندما ننظر الى المعادلة $x + 5 = 0$ نجد أنه ليس لها حل في مجموعة الأعداد الطبيعية ، بالتالي ظهرت الحاجة لتوسعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ، فالمعادلة $x + 5 = 0$ قابلة للحل في $\mathbb{Z}$ وحلها $x = -5$

- لن نتوقف هنا ، لنفرض المعادلة $2x - 1 = 0$ من الواضح أنه ليس لها حل في $\mathbb{N}$ ولا في $\mathbb{Z}$ لذلك سنوسع مجموعة الأعداد الصحيحة الى مجموعة تحوي اعداد كسرية و لندعوها ((مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$))

- وهكذا ...حتى إذا نظرنا الى المعادلة $x^2 = 2$ فلن نجد في اي من المجموعات $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ عددا مربعه يساوي ٢ لذلك سنوسع هذه المجموعة الأخيرة $\mathbb{Q}$ الى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ التي تحوي حلين ((ليس فقط حل واحد)) احدهما موجب والآخر سالب كلاهما جذر.

ولكن عندما نستخدم رمز الجذر فنقصد فقط الجذر الموجب

مثال : $x^2 = 9$

$$|x| = 3$$

إما $x = +3$, أو $x = -3$

- اخيرا لنأخذ المعادلة : $x^2 + 2 = 0$ فنجد انه لا يوجد لها حل بالمجموعات التي ذكرناها سابقا لذلك تم إيجاد مجموعة جديدة تدعى مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ و هي التي ستكون محور دراستنا في هذا المقرر.

وكل ما درسناه في السنوات السابقة على التحليل الحقيقي ((من دراسة التوابع وخواصها و الاستمرار و الاشتقاق والمتتاليات وغيرها ...)) سندرسه على مجموعة الأعداد العقدية.

اي سنقوم بدراسة تابع عقدي والمتتاليات والمتسلسلات على توابع عقدية وتقارب متسلسلة عقدية ....

*نلاحظ ان المعادلة التالية : $x^2 = -3$ لا يوجد لها حل في $\mathbb{R}$ ، لذلك قام العلماء بالبحث عن مجموعة اوسع من مجموعة الأعداد الحقيقية وهي مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$

((مجموعة الأعداد العقدية))

العدد العقدي : نسمي اي ثنائية مرتبة (α, β) من الأعداد الحقيقية عدداً عقدياً ونرمز لمجموعة الأعداد العقدية بالرمز $\mathbb{C}$

أي أن : $\mathbb{C} = \{(\alpha , \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

ونعني بكلمة مرتب بأن : $(\alpha, \beta) \neq (\beta, \alpha)$

أمثلة عن الأعداد العقدية

$$(0,0), \left(-\frac{2}{3}, 1\right), \left(\frac{\pi}{3}, -2\right), (1,1), (-1,-1), \left(e, \frac{2}{e}\right)$$

تساوي عددين عقديين

ليكن : $z_1 = (\alpha_1 , \beta_1) \quad , z_2 = (\alpha_2 , \beta_2) \in \mathbb{C}$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \wedge \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2$$

((جبر الأعداد العقدية))

- **جمع الأعداد العقدية:**

ليكن $z_1 = (\alpha_1 , \beta_1) \quad , \quad z_2 = (\alpha_2 , \beta_2) \in \mathbb{C}$

لنعرف عملية الجمع بالشكل :

$$(\alpha_1 , \beta_1) + (\alpha_2 , \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2 , \beta_1 + \beta_2)$$

و هو قانون التشكيل الداخلي ((لأن مجموع عددين عقديين هو عدد عقدي)) وبسهولة يمكن ملاحظة أن هذا الجمع تبديلي و تجميعي ، وأنه يملك حيادي وهو $(0 , 0)$ حيث :

$$(\alpha , \beta) + (0,0) = (\alpha + 0 , \beta + 0) = (\alpha , \beta)$$

ولكل عنصر نظير و ذلك من خلال:

$$(\alpha , \beta) + (-\alpha , -\beta) = (0 ,0)$$

$$\Rightarrow -(\alpha , \beta) = (-\alpha , -\beta)$$

واشارة $(-)$ تعني نظير

بالتالي نستنتج أن $(\mathbb{C},+)$ زمرة تبديلية

- **ضرب الأعداد العقدية :**

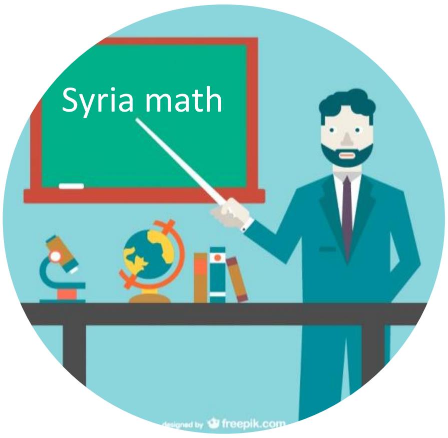
$$(\alpha_1 , \beta_1).(\alpha_2 , \beta_2) = (\alpha_1.\alpha_2 - \beta_1\beta_2 , \alpha_1.\beta_2 + \alpha_2.\beta_1) \in \mathbb{C}$$

و هي عملية تجميعية وتبديلية ويوجد $(1,0\_$ حيادي بالنسبة لعملية الضرب

حيث : $(\alpha , \beta).(1 ,0) = (\alpha - 0 ,0 + \beta) = (\alpha , \beta)$

ولكل عدد عقدي (α , β) غير معدوم اي غير (٠,٠) نظير بالنسبة للجداء ((مقلوب))

ومنه $(\mathbb{C},+,.)$ حقل تبديلي اي لا يحوي قواسم للصفر.



- *ضرب عدد عقدي بعدد حقيقي أو سلمي :

ليكن : $z = (\alpha , \beta) \in \mathbb{C}$ ، $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda . z = (\lambda\alpha , \lambda\beta) \in \mathbb{C}$$

وهو قانون التشكيل الخارجي

بالتالي $(\mathbb{C},+,.)$ فضاء حقيقي بعده ٢.

تمرين : عين نظير عدد عقدي غير صفري بالنسبة لعملية الضرب

لنأخذ : $z = (\alpha , \beta) \neq (0,0)$

و النظير : $z' = (\alpha' , \beta') \neq (0,0)$

$$z . z' = (\alpha . \alpha' - \beta . \beta' , \alpha . \beta' + \alpha' . \beta) = (1,0)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha . \alpha' - \beta . \beta' = 1 \quad \dots (1)$$

$$\alpha . \beta' + \alpha' . \beta = 0 \quad \dots (2) \Rightarrow \boxed{\beta' = -\frac{\alpha' . \beta}{\alpha}} \dots (3)$$

نعوض في (١) : $\alpha . \alpha' - \beta\left(-\frac{\alpha' . \beta}{\alpha}\right) = 1$

$$\Rightarrow \quad \alpha . \alpha' + \beta^2 \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$$

نضرب الطرفين ب α :

$$\alpha^2 . \alpha' + \beta^2 . \alpha' = \alpha$$

$$\alpha'(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}} \dots *$$

نعوض * في (٣) فنجد : $\boxed{\beta' = -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}}$

إذاً : $:\ \mathfrak{z}' = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} , -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$

ملاحظة : إن الأعداد العقدية هي فضاء متجهي وهي حقل ومن مميزات الحقل $\mathbb{C}$ أنه لا يحوي قواسم الصفر اي أن :

$$\mathfrak{z}_1 . \mathfrak{z}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{z}_1 = 0 \;\vee\; \mathfrak{z}_2 = 0$$

توضيح : هناك فرق كبير بين قولنا إن $\mathbb{C}$ حقل مرتب وقولنا أن $\mathbb{C}$ مجموعة مرتبة بسبب ما يلي :

المجموعة المرتبة : هي مجموعة غير خالية يُعرّف عليها علاقة ترتيب (انعكاسية –تناظرية – متعدية) .

أما **الحقل المرتب :** فهو بالإضافة إلى أنه مجموعة عُرّف عليها علاقة ترتيب يجب على هذه العملية أن تحافظ على انسجام العمليات المعرفة على هذا الحقل أي ((لا يكفي وجود علاقة ترتيب على الحقل لنقول عنه أنه مرتّب – بل يجب أن نحافظ على انسجام العمليات))

ونقصد بانسجام العمليات :

الانسجام الجمعي : إذا كان : $a \le b$ و c عنصر من الحقل فإن : $a + c \;\le\; b + c$

الانسجام الضربي : إذا كان : $a \le b$ و c عنصر من الحقل فإن : $a \,.\, c \;\le\; b \,.\, c$

وبالتالي $\mathbb{C}$ مجموعة مرتبة ((وفق علاقة الترتيب التي ذكرناها))

ولكن بالنسبة للحقل فهي ليست مرتبة وفق هذه العلاقة (و يمكن برهان انه لا يمكن إيجاد علاقة ترتيب تُحافظ على الإنسجام المطلوب)

وظيفة :أثبت أن الحقل $\mathbb{C}$ لا يمكن ترتيبه كلياً .

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى