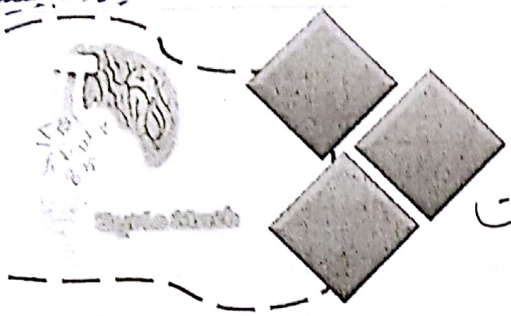


المحاضرة الثالثة

نظري ☑
عملي ☐

◄ دكتور المادة: عضوت الجيرودي

◄ عنوان المحاضرة: مسائل بحوث العمليات

## مسائل بحوث العمليات:

متحولات $x \in R^n$

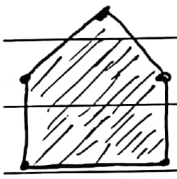
دالة الهدف Max أو Min $f(x)$

شروط المسألة $s.t\ g_i(x) \leq b_i$

$g_k(x) \geq b_j$

شروط عدم السلبية $x_i \geq 0$

### تعريف منطقة الحلول:



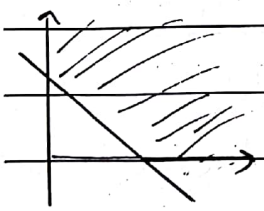
هي المنطقة التي تحوي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتي تحقق شروط المسألة، يمكن منطقة الحلول بهذا الشكل كونها تحقق الشروط، فإذا كانت النقطة تنتمي الى منطقة الحلول تسمى حل للمسألة والكلية حل للمسألة

### تعريف الحل الأمثل $x^*$:

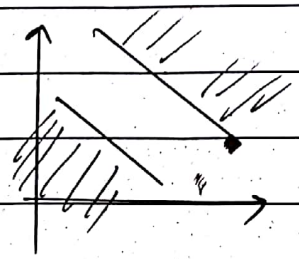
هي نقطة من منطقة الحلول تعطي أفضل قيمة لدالة الهدف.

### * المسائل حسب نوع الحل:

1) مسائل غير محدودة لو كانت منطقة الحلول باتجاه تسمى مسألة غير محدودة لأن الحل من الممكن أن يذهب إلى ∞.



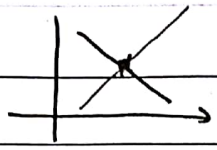
2) مسألة مستحيلة أو غير معرفة لأن منطقة الحلول فارغة. (لا يوجد نقطة مشتركة)





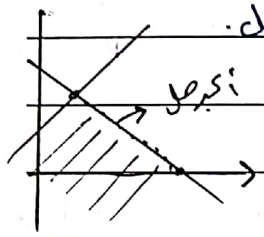
Scanned by CamScanner

3) مسائل بحل وحيد



4) عدد غير منته من الحلول كأن أي نقطة من المستقيم تمثل الحل.

// تحدث هذه الحالة عندما توازي دالة الهدف المشروط بأحد قيود المسألة



* أنواع المسائل من حيث الدوال: "دالة الهدف والشروط المسألة"

1) نموذج خطي: إذا كانت دالة الهدف ودوال شروط المسألة دوال خطية

2) نموذج غير خطي: إحدى الدوال إما دالة الشروط المسألة أو دالة الهدف غير خطية

ملاحظات: يمكن أن تكون المتحولات عبارة عن مصفوفة $x \in R^{n \times m}$

3) نموذج تربيعي: دالة الهدف دالة تربيعية ودوال شروط المسألة يجب أن تكون دوال خطية

البرامج الأمثلية الخطية:

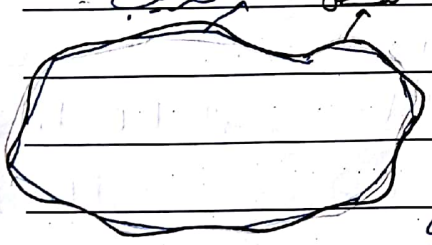
$$\text{Min } f(x)$$

$$\text{s.t} \quad g_i(x) = b_i \quad \text{تابع خطي}$$

$$x_i \geq 0$$

1) حل البرنامج الخطي يعني لنا حل البرامج الغير خطية بشكل تقريب

2) يمكن للشكل الخطي أن يقرب أي شكل



3) كلما زادت الدقة تزيد المعادلات والشروط

4) يوجد الكثير من البرامج الخطية كما يوجد الكثير من البرامج التي تقترب الى برامج خطية



Scanned by CamScanner

تمرين

صانع المفروشات لديه نوعين من المخدات، الربح من النوع الأول 50 ألف والربح من النوع الثاني 80 ألف

يشتري $15m^2$ من الخشب أسبوعياً، يلزم القطعة من النوع الأول $3m^2$

يلزم القطعة من النوع الثاني $5m^2$

يشتري $6m^2$ من الزجاج أسبوعياً، يلزم القطعة من النوع الأول $1m^2$

يلزم القطعة من النوع الثاني $2m^2$

حدد عدد القطع الواجب انتاجها في الأسبوع لتحديد أكبر ربح

الحل

المتحولات: ليكن $x_1$ عدد القطع المنتجة من النوع الأول.

$x_2$ عدد القطع المنتجة من النوع الثاني

التابع الهدف: أكبر ربح $Max\ h(x) = 50x_1 + 80x_2$

شروط المسألة:

1) شرط الخشب $3x_1 + 5x_2 \leq 15$

"النوع الأول - يحتاج 3 أمتار، النوع الثاني - يحتاج 5 أمتار مجموعهم يجب ألا يتجاوز 15 متر هي كمية الخشب المشتراة في الأسبوع"

2) شرط الزجاج: $1x_1 + 2x_2 \leq 6$

"النوع الأول - يحتاج متر واحد، والنوع الثاني يحتاج مترين مجموعهم يجب ألا يتجاوز 6 أمتار، وهي كمية الزجاج المشتراة في الأسبوع"

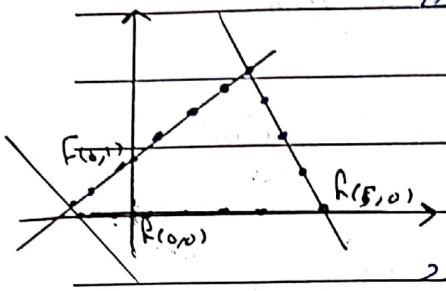
3) شرط عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0 \quad \exists\ Z$



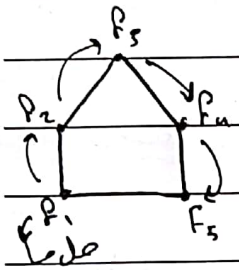
Scanned by CamScanner

النموذج الخطي:

$$Max\ F(x_1) = 50x_1 + 80x_2$$
$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$\forall\ x_1, x_2 \ge 0$$




لإيجاد الحل، نمثل:
نرسم مستقيم موازي دالة الهدف أو بطريقة أخرى
الحل موجود في زوايا منطقة الحلول
- الوظائف: مسألة إبداعية نضبط لها مجموعة على الحدود




- الوظائف: منطقة الحلول بالشكل الآتي
نعلم أن الحل موجود بأحد الزوايا لذا أبحث عما ينتقل
إلى القيمة الأكبر

## النموذج القياسي

لها الشكل التالي:

$$Min\ F(x)$$
$$s.t\ g_j(x) = a_j \quad : j = 1, \dots, n$$
$$x_k \ge 0 \quad : k = 1, \dots, n$$

$a_j$ ثوابت موجبة
كل المتحولات يجب أن تكون موجبة ويجب أن تكون حرة
غالباً الحل يكون في الربع الأول

**ملاحظات:** يمكن تحويل أي مسألة إلى نموذج قياسي:

1) تحويل Max إلى Min بضرب دالة الهدف بـ $(-1)$

$$Max\ F(x) \iff Min\ -F(x)$$

2) تحويل المتحولات الحرة إلى متحولات غير سالبة
ليكن $x_i$ متحول حر نكتبه كحاصل متحولين موجبين أي

$$x_i = y_i - z_i \quad : y_i - z_i \ge 0$$



Scanned by CamScanner

3) تحويل التراجعات الى مساواة :

- نحول طرف الثابت في الطرف الأيسر الى عنصر موجب

" نضرب التراجعة ×(-1) اذا كان سالب "

- اذا كانت التراجعة أكبر من أو يساوي $g_k(x) \geq a_k$ نقوم بطرح متحول غير سالب من الطرف الأول ونستبدل التراجعة بمساواة (=) $g_k(x) - S_k = a_k$

- اذا كانت التراجعة أصغر أو يساوي $g_k(x) \leq a_k$ نقوم بجمع متحول غير سالب من الطرف الأول ونستبدل التراجعة بمساواة (=) $g_k(x) + S_k = a_k$

مثال: اكتب النموذج القياسي للمسألة.

$$\text{Max } F(x) = 5x_1 + 6x_2 - x_2^2$$
$$\text{s.t} \quad x_1 - 5x_2 \geq -3$$
$$2x_1 + x_2 \geq 7$$
$$x_1 \geq 0$$

1- نحول Max الى Min بضرب دالة الهدف ×(-1) وكذلك نضرب مسألة الشرط الأول ×(-1) لتحويل الطرف الثاني الى موجب

$$\text{Min } F(x) = -5x_1 - 6x_2 + x_2^2$$
$$\text{s.t} \quad -x_1 + 5x_2 \leq +3$$
$$2x_1 + x_2 \geq 7$$
$$x_1 \geq 0$$

2- نبدل $x_2$ بـ $x_2 = y_2 - z_2$ لأن $x_2$ متحول غير مقيد بالإشارة الى موجب

$$\text{Min } F(x) = -5x_1 - 6(y_2 - z_2) + (y_2 - z_2)^2$$
$$\text{s.t} \quad -x_1 + 5(y_2 - z_2) \leq +3$$
$$2x_1 + (y_2 - z_2) \geq 7$$

3- نحول التراجعات لمساواة لنحصل على الشكل القياسي

$$\text{Min } F(x) = (y_2 - z_2)^2 + 5x_1 + 6(y_2 - z_2)$$
$$\text{s.t} \quad -x_1 + 5(y_2 - z_2) + S_1 = 3$$
$$2x_1 + (y_2 - z_2) - S_1 = 7$$
$$x_1, y_2, z_2, S_1, S_2 \geq 0$$



Scanned by CamScanner

متى تكون لدينا مسألة محدبة ؟

لتكن لدينا المسألة

$$\text{Min } f(x)$$
$$g_i(x) \geq 0 \quad ; i = 1, \dots, p$$
$$h_j(x) = 0 \quad ; j = 1, \dots, p$$

تكون محدبة اذا كانت الدوال $f$ محدبة و $g_i$ مقعرة و $h_j$ دوال خطية

مثال : هل النموذج التالي محدب ولماذا ؟

$$\text{Max } f(x) = x_1^2 - e^{x_1+x_2}$$
$$\text{s.t} \quad e^{x_1+x_2} \leq 7$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

نحول دالة الهدف من Max اي Min ونحول بالمساواة اي متراجحة

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 \iff \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \geq 2 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Min } f(x) = -x_1^2 + e^{x_1+x_2}$$
$$-e^{x_1+x_2} + 7 \geq 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 2 \geq 0$$
$$-(x_1^2 + x_2^2) + 2 \geq 0$$

$f$ دالة محدبة (في الامتحان نكتب البرهان)

$g_1 : e^{x_1+x_2}$ محدبة $\Rightarrow -e^{x_1+x_2}$ مقعر

$g_2$ دالة محدبة

$g_3 : g_3 = -g_2$ بما ان $g_2$ محدبة فإن $g_3$ مقعرة

وبالتالي النموذج غير محدب

(( كما بالإمكان الحكم على مجموعة الحلول التي تحقق بالمساواة ليست خطية بالتالي ليست محدبة ))

انتهت المحاضرة



Scanned by CamScanner