8-10-2018

نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الخامسة ◄ عنوان المحاضرة: متتالية التوابع

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـأمثلة عن تقارب الجداءات.

٢ـمتتاليات التوابع ( تعاريف ـ تقاربها و تباعدها).

٣ـأمثلة .

**مثال (١):** ادرس تقارب الجداء الغير منتهي ثم اوجده في حال التقارب :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$$

نأخذ متتالية الجداءات الجزئية :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\frac{k+1}{k}}$$

$$P_n = \frac{e^{1}.e^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{3}}\ldots e^{\frac{1}{n}}}{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n+1}{n}}$$

$$P_n = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}}}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} = ln(n)+c+\Upsilon_n$$

حيث $c$ ثابت اولر : $c = 0,4672$

$$\lim_{n\to\infty} \Upsilon_n = 0 \quad \Rightarrow \quad P_n = \frac{e^{\ln(n)+c+\Upsilon_n}}{n+1} = \frac{n + e^c + e^{\Upsilon_n}}{n+1}$$

النهاية موجودة ومحدودة $\quad lim_{n\to\infty} P_n = e^c \quad$ وبالتالي الجداء موجود و قيمته $P = e^c$

**مثال (٢):** أوجد قيمة الجداء $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$

الحل:

**تذكرة :**

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

لنشكل الجداء الجزئي $P_n$

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$p_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{13}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{21}{13} \cdots\cdots \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{2}{3} = p$$

النهاية موجودة ومحدودة وبالتالي الجداء متقارب وقيمته $\frac{2}{3}$ .

**مثال (٣):**

أوجد قيمة الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{2n+7}{2n+5}$ :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k+3} \cdot \frac{2k+7}{2k+5}$$

$$p_n = \frac{3}{5}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{11}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{13}{11}\cdots\cdots\frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{2n+7}{2n+5}$$
$$= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\cdot\frac{\mathbf{2n+7}}{\mathbf{2n+3}}$$
$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{7} = p$$

**مثال (٤) :** ادرس تقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^s}\right)$ حيث $s > 0$

نلاحظ أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ متقاربة من أجل $s > 1$ لأنها متسلسلة ريمانية و متباعد عندما $0 < s \leq 1$

بالتالي الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^s}\right)$ متقارب من أجل $s > 1$ .

## التقارب الشرطي والتقارب المطلق للجداء الغير منته

نقول عن الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ انه متقارب بإطلاق اذا وفقط إذا كانت المتسلسلة التابعة للقيم المطلقة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ متقاربة بإطلاق .

*أما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ متقاربة شرطياً فإن الجداء غير المنته $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب شرطياً.

**مثال :** ادرس تقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ حيث $s > 0$

نلاحظ أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متقاربة شرطياً $\Leftarrow$الجداء متقارب شرطياً.

## متتاليات التوابع

◄**تعريف :** لتكن $n \in \mathbb{N}$ $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع حقيقية معرفة على مجال ما $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ حدودها :

$$f_1(x)\,, f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \quad : x \in \mathbb{S}$$

◄نقول عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ إنها متقاربة $\forall x \in \mathbb{S}$ و $n \in \mathbb{N}$

إذا وفقط إذا كانت متقاربة كمتتالية عددية من أجل كل x من المجال $\mathbb{S}$ ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{S}$$

ويقال حينئذٍ أن المتتالية متقاربة (نقطياً) من الدالة $f(x)$ على $\mathbb{S}$ .

◄ نقول عن المتتالية $\{f_n(x)\}$ إنها متباعدة على $\mathbb{S}$ إذا وجدت قيمة واحدة على الأقل $x = x_0$ تتباعد عندها المتتالية .

◄ نسمي مجموعة قيم $x$ التي تتقارب عندها المتتالية بمنطقة التقارب .

◄ **تعريف أخر :** نقول عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجموعة الجزئية $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ إنها متقاربة من دالة النهاية $f(x)$ إذا وفقط إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ ولكل $x_0$ من المجال $\mathrm{I}$ عدد $\mathrm{N}_0 \neq 0$ طبيعي بحيث يكون : $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ لأجل كل من $\varepsilon, x_0$ أي أن : $N_0 = N_0(\varepsilon, x_0)$

**مثال (١)** لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = x^n$ , $x \in I = [0,1]$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 \ ; & 0 \le x < 1 \\ 1 \ ; & x = 1 \end{cases}$$

نجد أن المتتالية متقاربة نقطياً على $[0,1]$ ونجد أن جميع حدود هذه المتتالية

$$x, x^2, x^3 \dots, x^n, \dots$$

هي توابع مستمرة على $\mathrm{I} = [0,1]$ أما تابع النهاية هو منقطع أي (غير مستمر عند $x = 1$)

**مثال (٢)** لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{1}{e^{nx}}$ و $x \in \mathrm{I} = [0, \infty[$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx}} = \begin{cases} 0 \ ; & x > 0 \\ 1 \ ; & x = 0 \end{cases}$$

فهي متقاربة نقطياً ، و كما أنه نلاحظ أن جميع حدود هذه المتتالية $\frac{1}{e^{x}}, \frac{1}{e^{2x}}, \dots$ توابع مستمرة إلا أن تابع النهاية $f(x) = \begin{cases} 0 \ ; & x > 0 \\ 1 \ ; & x = 0 \end{cases}$ غير مستمر عند الصفر

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$$

**مثال (٣)** لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ و $x \in [0, \infty[$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ ; & x = 0 \\ 0 \ ; & 0 < x < \infty \end{cases}$$

التقارب هو تقارب نقطي ودالة النهاية تعاني انقطاع عند $x = 0$

**مثال (٤)** : لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1} & : |x| < 1 \\ 1 & : |x| = 1 \\ \dfrac{n+1}{n} & : |x| > 1 \end{cases}$$

حيث $x \in \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

نأخذ تابع النهاية $f(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \quad : x \in \mathbb{R}$

ومنه التقارب نقطي.

تابع النهاية هو تابع مستمر على $\mathbb{R}$ وحدود المتتالية هي توابع غير مستمرة على $\mathbb{R}$ تعاني انقطاع عند $(x = -1 , x = 1)$

**انتهت المحاضرة**

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو