نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الثانية ◄ عنوان المحاضرة: علاقات التكافؤ

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-علاقات التكافؤ/ مبرهنات.

مراجعة : $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ على P من أجل كل عنصر من هذه المجموعة ...

عرفنا صف التكافؤ بالشكل :

$$\forall a \in P : \overline{a} = \{x \in P, a\mathcal{P}x\} \subseteq P$$

ومجموعة الخارج هي : $P/_{\mathcal{P}} = \{\overline{a} : a \in P\}$

تمهيدية :

لتكن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ على المجموعة P ولتكن $a, b \in P$ عندئذ :

$$a \in \overline{b} \iff \overline{a} = \overline{b}$$

(أي صف تكافؤ المولد بالعنصر a هو نفسه صف التكافؤ المولد بالعنصر b عندما وفقط عندما $a \in \overline{b}$

البرهان :

$\Leftarrow$لنفرض أن $\overline{a} = \overline{b}$ عندئذ لما كانت العلاقة $\mathcal{P}$ انعكاسية فإن : $a \in \overline{a} = \overline{b}$

$\Rightarrow$ لنفرض أن $a \in \overline{b}$ عندئذ حسب التعريف $a\mathcal{P}\, b$

- ليكن $x \in \overline{a}$ عندئذ حسب التعريف $a\mathcal{P}x$، وبالتالي طالما العلاقة تناظرية فإن $x\mathcal{P}a$

ولما كانت العلاقة $\mathcal{P}$ متعدية نجد أن $x\mathcal{P}b$ وبالتالي $x \in \overline{b}$ ومنه $\overline{a} \subseteq \overline{b}$

- ليكن $y \in \overline{b}$ عندئذ $b\mathcal{P}y$ ومنه لما كانت $\mathcal{P}$ تناظرية فإن $a\mathcal{P}b$ وبما أن $\mathcal{P}$ متعدية نجد أن $a\mathcal{P}y$

ومنه $\overline{b} \subseteq \overline{a}$ وبالتالي $\overline{a} = \overline{b}$.

ملاحظة :

علاقة التكافؤ من خلال صفوف التكافؤ تقسم إلى P إلى مجموعات جزئية ،سندرس خواص هذه المجموعات الجزئية من خلال التعريف التالي ....

تعريف :

لتكن P مجموعة غير خالية ولتكن $\sum$ أسرة من المجموعات الجزئية غير الخالية من P نقول عن $\sum$ أنها تشكل تجزئة للمجموعة P إذا وفقط إذا تحققت الشروط :

١) $\forall A \in \sum \ , \ A \neq \emptyset$

٢) $\forall A , B \in \sum \ ; \quad A \cap B = \emptyset \underbrace{\vee}_{\text{أو}} A = B$

٣) $\bigcup_{a \in \sum .} A = P$

ـ أي أنها غير خالية وغير متقطعة مثنى مثنى .

ـ يمكن التعبير عنها من خلال اجتماع مجموعها الجزئية

مثال على التجزئة : مجموعة الأعداد الصحيحة Z يمكن تجزئتها بالشكل $Z^{+} \ , \ Z^{-}$

ويمكن تجزئتها بالشكل : $Z^{+} , \ 0 \ , Z^{-}$

ويمكن تجزئتها بأشكال أخرى .. وبالتالي : التجزئة غير وحيدة .

ـ أبسط مثال على التجزئة هو : مجموعة الخارج $P_{/\mathcal{P}}$ هي علاقه تكافؤ تولد مجموعات جزئيه ليست خاليه

تمهيدية :

لتكن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ على المجموعة P .

إن مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{P}$ أي مجموعة الخارج $P_{/\mathcal{P}} = \{\overline{a} : a \in P\}$ تشكل تجزئة للمجموعة P .

البرهان :

الشرط الأول : لنبرهن أنها غير خالية : لدينا $P_{/\mathcal{P}} = \{\overline{a} : a \in P\}$

$$\forall \overline{a} \in P_{/\mathcal{P}} \; ; \; a \in \overline{a} \implies \overline{a} \neq \emptyset$$

الشرط الثاني : ليكن $\overline{a}, \overline{b} \in P_{/\mathcal{P}}$ وعندئذ $a, b \in P$

١- إذا كان $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$ فإنه سيتم المطلوب ..

٢- إذا كان $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ عندئذ يوجد على الأقل عنصر مشترك :

$$\exists \, c \in P \; : \; c \in \overline{a} \cap \overline{b}$$

حسب تمهيدية سابقة إذا انتمى عنصر لصف تكافؤ فإن $\overline{a} = \overline{b}$ ولنتحقق من ذلك :

$$\begin{cases} c \in \overline{a} \implies \overline{c} = \overline{a} \\ c \in \overline{b} \implies \overline{c} = \overline{b} \end{cases} \implies \overline{a} = \overline{b}$$

الشرط الثالث :

$$P = \bigcup_{a \in P} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in P} \overline{a} = \bigcup_{\overline{a} \in P_{/\mathcal{P}}} \overline{a} \subseteq P$$

$$P = \cup_{\overline{a} \in P_{/\mathcal{P}}} \overline{a}$$

ومنه المجموعة $P_{/\mathcal{P}}$ تشكل تجزئة للمجموعة P.

مبرهنة: لتكن P مجموعة غير خالية ولنفرض ان Σ تجزئة للمجموعة P عندئذ العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة على P بالشكل:

$$\forall a, b \in P \; : \; a\mathcal{P}b \iff \exists \, A \in \Sigma \, ; \; a, b \in A$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة P وإن صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{P}$ هي وفقط هي عناصر التجزئة Σ أي أن :

$$\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

البرهان :

لنبرهن أن $\mathcal{P}$ هي علاقة تكافؤ فإن :

١) **انعكاسية لأن $\mathcal{P}$:** بما ان Σ تجزئة للمجموعة P فهذا وحسب الشرط الثالث من شروط التجزئة $P = \cup_{A\,\epsilon\Sigma} A$ كل عنصر من p ينتمي لواحدة على الأقل من المجموعات الجزئية

لنأخذ عنصر كيفي من $a\,\epsilon\, P$ فيكون $a\,\epsilon \cup_{A\,\epsilon\Sigma} A$ وبذلك

$$\exists\, A\,\epsilon\Sigma\,;\ a\,\epsilon\, A \implies a\mathcal{P}a$$

٢) **تناظرية لأن $\mathcal{P}$:** لنأخذ عنصريين كيفيين

$$\forall a,b\,\epsilon P:\ a\mathcal{P}b \iff \exists\, B\,\epsilon\Sigma\ ;\ a,b\,\epsilon\, B\ ,\ b,a\,\epsilon\, B \implies b\mathcal{P}a$$

٣) **متعدية لأن $\mathcal{P}$:** لنأخذ ثلاث عناصر كيفية : $\forall a,b,c\ \epsilon P$

$$a\mathcal{P}b \implies \exists\ A\,\epsilon\Sigma\ ;\ a,b\,\epsilon\, A$$

$$b\mathcal{P}c \implies \exists\ B\,\epsilon\Sigma\ ;\ b,c\,\epsilon B \qquad\qquad \implies b\,\epsilon\, A\cap B \implies A\cap B \neq \emptyset$$

وكون Σ تجزئة للمجموعة P فإن : $A = B$ ومنه $a\mathcal{P}c \Leftarrow a\,,c\ \epsilon\, A$ ومنه $\mathcal{P}$ متعدية .

لنثبت الان المساواة:

$$\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

ليكن $A \in \Sigma$ عندئذ $A \neq \emptyset$ ومنه يوجد $a \in A$ ولنبرهن ان $A = \bar{a}$

ليكن $x \in A$ عندئذ $a,x \in A$ ومنه $a\mathcal{P}x$ (حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة)

وبالتالي $x \in \bar{a}$ ومنه $A \subseteq \bar{a}$

وليكن $y \in \bar{a}$ عندئذ $a\mathcal{P}y$ (و حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة) يكون $\exists B\,\epsilon\Sigma\ ;\ a,y\,\epsilon\, B$

$a \in A\cap B$ وبالتالي $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ (حسب الشرط الثاني من شروط التجزئة)

$$\Rightarrow y \in A$$

$$\Rightarrow \bar{a}\ \subseteq A$$

$$A = \bar{a}\,\epsilon\, {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

وبالتالي نحصل على ان

$$\Sigma \subseteq {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

لنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $\bar{b}\,\epsilon\, {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ حيث $b \in P = \cup_{D\in\Sigma} D$

ومنه يوجد $D_0 \in \Sigma$ بحيث $b \in D_0$ ولنبرهن على $\bar{b} = \mathrm{D}_0$

ليكن $x \in D_0$ عندئذ $b,x \in D_0$(حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة)$\Leftarrow b\mathcal{P}x$ ومنه $x \in \bar{b}$

ومنه $D_0 \subseteq \bar{b}$

وليكن $y \in \bar{b}$ عندئذ $b\mathcal{P}y$ ومنه (حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة)

$$\exists k \in \Sigma ; b, y \in k$$

اصبح لدينا $b \in D_0 \cap k$ ومنه $D_0 = k$ (حسب الشرط الثاني من شروط التجزئة)

ونجد ان $y \in D_0$ أي ان $\bar{b} \subseteq \mathrm{D}_0$ ومنه $\bar{b} = \mathrm{D}_0 \in \Sigma$

وهكذا فإن كل مجموعة تنتمي الى Σ اصبح موجوداً في $P/_{\mathcal{P}}$ أي أن

$$P/_{\mathcal{P}} \subseteq \Sigma$$

$$\Rightarrow P/_{\mathcal{P}} = \Sigma$$

مبرهنة: لتكن P مجموعة غير خالية ولنفرض أن θ و Σ تجزئتين للمجموعة P فإن $\mathcal{P}_\theta$ و $\mathcal{P}_\Sigma$ علاقتي التكافؤ المولدتين بـ θ و Σ على الترتيب عندئذ :

$$\mathcal{P}_\Sigma = \mathcal{P}_\theta \Leftrightarrow \Sigma = \theta$$

البرهان :

" $\Leftarrow$ " لنفرض أن $\Sigma = \theta$ ولنبرهن أن $\mathcal{P}_\Sigma = \mathcal{P}_\theta$ وليكن $(a,b) \epsilon\, \mathcal{P}_\Sigma$ حيث $a,b \,\epsilon\, \mathrm{P}$ عندئذ :

حسب تعريف $\mathcal{P}_\Sigma$ نجد أن :

$$\exists\ \mathrm{A}\ \epsilon \Sigma\ ;\ \mathrm{a}, b\ \epsilon\ A$$

ولدينا $\Sigma = \theta$ فرضا فإن $\mathrm{A}\ \epsilon\theta$

$$a, b\ \epsilon\ A \implies a\mathcal{P}_\theta\, b$$

أي أن: $(a,b)\ \epsilon\ \mathcal{P}_\theta$ ومنه $\mathcal{P}_\Sigma \subseteq \mathcal{P}_\theta$.

لنبرهن أن $\mathcal{P}_\theta \subseteq \mathcal{P}_\Sigma$ أي **لنبرهن الاحتواء المعاكس**: وليكن $(d,f) \epsilon \mathcal{P}_\theta$ حيث $d,f\ \epsilon\ \mathrm{P}$ عندئذ :

حسب تعريف $\mathcal{P}_\Sigma$ نجد أن :

$$\exists B\ \epsilon\theta ; d, f\ \epsilon\ B$$

ولدينا $\Sigma = \theta$ فرضاً ومنه $\mathrm{B} \in \Sigma$.

أي أن : $d,f\ \epsilon\Sigma$ فإن $f\mathcal{P}_\Sigma\, d$ ومنه $(d,f)\epsilon\mathcal{P}_\Sigma$ ومنه يكون :

$$\mathcal{P}_\theta \subseteq \mathcal{P}_\Sigma$$

ومن الاحتوائيين : $\mathcal{P}_\theta \subseteq \mathcal{P}_\Sigma$ و $\mathcal{P}_\Sigma \subseteq \mathcal{P}_\theta$ يكون $\mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$.

" $\Rightarrow$ " نفرض أن العلاقتين $\mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$ عندئذ يكون $P/_{\mathcal{P}_\theta} = P/_{\mathcal{P}_\Sigma}$

بناءً على مبرهنة سابقة : فإن كل تجزئة تعرف علاقة تكافؤ وأن صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي وفقط هي عناصر التجزئة فهذا يؤدي أن :

$$\Sigma = P/_{\mathcal{P}_\Sigma} = P/_{\mathcal{P}_\theta} = \theta$$

وبذلك تم المطلوب.

مبرهنة :

لتكن P مجموعة غير خالية ولنفرض أن l مجموعة كل التجزئات المعرفة على P

و l_0 مجموعة كل علاقات التكافؤ المعرفة على P عندئذ : يوجد تطبيق متباين وغامر(تقابل) بين l و l_0 وهو: $f : l \to l_0$

البرهان :

لنعرف العلاقة بالشكل : $f : l \to l_0$

$$\forall \Sigma \in l : f(\Sigma) = \mathcal{P}_\Sigma$$

ولما كان $\mathcal{P}_\Sigma$ علاقة تكافؤ على P فإن $\mathcal{P}_\Sigma \in l_0$

f تطبيق لأن :

$$\forall \Sigma , \theta \in l : \theta = \Sigma \implies \mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$$

$$\implies f(\Sigma) = f(\theta)$$

f تطبيق متباين لأن :

$$f(\Sigma) = f(\theta) \implies \mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$$

$$\implies \Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}_\Sigma} = {}^{P}/_{\mathcal{P}_\theta} = \theta$$

f تطبيق غامر لأنه :

$\mathcal{P} \in l_0$ فإن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ على P .

عندئذ فإن مجموعة الخارج ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$ تشكل تجزئة للمجموعة P وبالتالي ${}^{P}/_{\mathcal{P}} \in l$ أي أنّ :

$$\implies f\left({}^{P}/_{\mathcal{P}}\right) = \mathcal{P}_{P/_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$$

ومنه f تقابل و هو المطلوب .

انتهت المحاضرة

إعداد: راما جوهر – آية اليافي – آية بسيكي

تنسيق: ولاء الأخضر