8/10/2018

نظري

◄ دكتور المادة: جمال الملي

◄ المحاضرة: الخامسة ◄ عنوان المحاضرة: الفضاء الفصول

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ أمثلة هامة من الفضاءات الفصولة والغير فصولة .

١ ـ الفضاء ℓ^{∞} غير فصول: وهو فضاء كل المتتاليات المحدودة وغير المحدودة .

فكرة البرهان (حتى نثبت أن ℓ^{∞} غير فصول يجب علينا إثبات أن كل مجموعة كثفية في هذا الفضاء غير عدودة وبالتالي يكون الفضاء غير فصول).

الإثبات

سنأخذ في الفضاء ℓ^{∞} مجموعة جزئية M $(M \subseteq \ell^{\infty})$ وهذه المجموعة عناصرها عبارة عن متتاليات من الطبيعة التالية :

حيث أن : $x = |\xi_i| \leq c_x$

$$x \in M \Rightarrow x = (\xi_1, \xi_2, \dots\dots, \xi_n, \dots)$$

وإن قيمة الحدود ξ_i إما صفر أو واحد عندئذ يكون $x \in \ell^{\infty}$ ،ولنقرن كل متتالية (x) بعنصر حقيقي نرمز له $(\hat{y})$

تمثيله الثنائي $\hat{y} = \frac{n_1}{2^1} + \frac{n_2}{2^2} + \frac{n_3}{2^3} + \cdots$

ان كل عنصرين مختلفين من M لهما تمثيلين مختلفين وان لكل عدد $\hat{y}$ ذو تمثيل ثنائي يقابل نقطة من المجال $[0,1]$

والأن ربطنا مكونات الـ M بمجموعة $[0,1]$ وهي غير عدودة

فإننا نستنتج وجود مجموعة غير عدودة من المتتاليات التي عناصر كل منها صفر أو واحد ، وبما أن المترك على ℓ^{∞} يبين أن المسافة بين أي متتاليتين مختلفتين من المجموعه M يجب أن تكون مساوية للواحد. أي $x, y \in \ell^{\infty}$ فإن $d(x,y) = sup|\xi_i - \eta_i|$

حيث: $x = (\xi_i)$ ، $y = (\eta_i)$

((إذا كان العنصرين مختلفتين فإن المسافة بينها ١ واذا كانا منطبقين فان المسافة هي ٠))

Syria Math Team

إذا جعلنا كلا من هذه المتتاليات مركزاً لكرة صغيرة نصف قطرها $\frac{1}{3}$ مثلاً : (أقل من الواحد)

((حيث يوجد عدد من الكرات الغير المتقاطعة في الفضاء))

فإننا نجد مجموعة غير عدودة منها .

((لكي يتم المطلوب يجب أن نبرهن أن كل المجموعات الكثيفة في هذا الفضاء هي غير عدودة))

ولنأخذ مجموعة كثيفة ما من هذا الفضاء ℓ^{∞} وحسب تعريف المجموعة الكثيفة يجب أن تحوي هذه المجموعة من كل كم هذه الكرات نقطة واحدة على الأقل .

وبالتالي عناصر هذه المجموعة غير عدودة عندها أصبح الفضاء ℓ^{∞} غير الفصول لأن كل كثيفة هي غير عدودة

٢- الفضاء ℓ^P هو فضاء فصول

((فكرة البرهان))

حتى نثبت أن فضاء ℓ^P فصول أي يحوي مجموعة جزئية كثيفة وعدودة .

((الإثبات))

لتكن لدينا $M \subseteq \ell^P$ ((مجموعة جزئية من ℓ^P))التي عناصرها هي متتاليات تتصف بما يلي :

$$y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots\dots, \eta_n, 0, 0, \dots) \in M$$

وحيث إن n عدد صحيح موجب والأعداد : η_i عادية ،

وبالتالي من الواضح أن M هي عناصر عدودة بقي علينا إثبات أن M كثيفة في ℓ^P .

لنفرض أن $x = (\xi_i) \in \ell^P$ ، عنصر ما عندئذ يوجد لكل عدد موجب تماما اختياري ε عدد صحيح موجب n (تابع ل ε) بحيث يكون :

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} (|\xi_i|^p) < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

أي أن مفهوم الكثافة بأسلوب علمي لبرهان أن << $\overline{M} = \ell^P$ >>
نبرهن أن :

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \forall x \in \ell^P \ ; \ \exists y \in M \ \ ; d(x, y) < \varepsilon$$

Syria Math Team

طالما أن $x \in \ell^P$ فإن المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p < +\infty$ أي أن المتسلسلة متقاربة ومنه فان أي باقي يسعى إلى الصفر أي :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} \iff R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p \to 0$$

ولما كانت مجموعة الأعداد العادية كثيفة في $\mathbb{R}$ فإنه يوجد لكل ξ_i عدد عادي η_i قريب منه لذا فإنه يمكننا ضمان وجود عنصر $y = (\eta_i)$ من M يحقق الشرط :

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - \eta_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} \quad ; \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \quad [d(x,y)]^p = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} < \varepsilon^p$$

ومنه $d(x,y) < \varepsilon$ وبالتالي فإن M كثيفة في ℓ^P

M كثيفة وعدودة $\Leftarrow \ell^P$ فضاء فصول .

انتهت المحاضرة

عليك أن تفعل الأشياء التي تعتقد أنه ليس باستطاعتك أن تفعلها

إعداد: بسمة نصر الله – تقى إسماعيل – رشا قرصة

Syria Math Team