المحاضرة 1+2

نظري ☑ عملي ☐

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ عنوان المحاضرة: حلقة الحدوديات

(٢٦/٩/٢٠١٨)(٣/١٠/٢٠١٨)

المحتوى العلمي:

1- تعريف حلقة الحدوديات.

2- الحدودية الخزولة على حقل ما.

3- مبرهنات دون برهان وأمثلة عليها.

تعريف حلقة الحدوديات:

لتكن R حلقة، نقول عن التركيب

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; : \; n \in N, a_0, a_1, \dots, a_n \in R$$

أنه حدودية من الدرجة n ونرمز لذلك بـ $deg(f) = n$

بأمثال من R ومتحول x.

مثال: $5x^2 + 3x - \sqrt{10}$ حدودية من الدرجة 2 وبأمثال من $\mathbb{R}$

★ نرمز لمجموعة كل كثيرات الحدود المعرفة على الحلقة R بالرمز

$$R[x] = \{ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; ; \; n \in N, a_i \in R \}$$

نزود هذه المجموعة بقانوني تشكيل داخليين الأول (+) والثاني (.)

كما يلي: $\forall \; f_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , f_2(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in R[x]$

$$f_1(x) + f_2(x) = \sum_{i=0}^{t} (a_i + b_i) x^i \; ; \; t = max(n,m)$$

$f_1(x) \cdot f_2(x) =$ يتم بتوزيع الضرب على الجمع مع ملاحظة

أن $x^i + x^j = x^{i+j}$

نجد أن الثلاثية $(R[x], +, \cdot)$ حلقة واحدية حيث

واحد الحلقة هو الحدودية الثابتة $f(x) = 1$

مثال: $f_1(x) = 3x^2 + 5x + 2 , f_2(x) = x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$

$f_1(x) + f_2(x) = 3x^2 + 6x + 3$

$f_1(x) \cdot f_2(x) = 3x^3 + 8x^2 + 7x + 2$

ملاحظات:

$\boxed{1}$ إن $0 \neq f(x), g(x) \in R[x]$ فإن

$\deg(f \cdot g) \leq \deg(f) + \deg(g)$

وإذا كانت R منطقة تكاملية فإن

$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$

$\boxed{2}$ نقول عن $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ أنها واحدية إذا كان $a_n = 1$

تنويه: سنقتصر في مقررنا على الحدوديات الواحدية.

$\boxed{3}$ لتكن $f(x)$ حدودية من $R[x]$ عندها نقول عن $\alpha \in \Omega$ أنه صفر لـ $f(x)$ إذا كان $f(\alpha) = 0$ أي $x - \alpha \mid f(x)$
يقسم

* ليس بالضرورة أن تكون هذه القسمة في $R[x]$.

مثال: $x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ فإن

$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

نلاحظ أن هذه القسمة في $\mathbb{C}[x]$

* ذكرنا أن $\alpha \in \Omega$ حيث أن Ω هي أكبر ساحة ممكنة وذلك لعمومية المسألة كما رأينا في المثال السابق أن $i, -i \in \mathbb{C}$.

$\boxed{4}$ خوارزمية القسمة في $K[x]$ حيث K حقل:

لتكن $f(x), g(x)$ حدوديتان من $K[x]$ بحيث $\deg(f) = n \geq 1$ عندها توجد حدوديتان $r(x), q(x)$ من $K[x]$ بحيث:

$g(x) = q(x) \cdot f(x) + r(x)$

حيث $r(x) = 0$ أو $\deg(r) < n$

تنويه: في مقررنا سنرمز دوماً للحقل بـ K وللاعلاقة بـ R

5 لتكن $f(x) \in K[x]$ حدودية من الدرجة n عندها $f(x)$ تملك n صفراً على الأكثر.

تعريف الحدودية غير الخزولة على حقل ما:

لتكن $f(x) \in K[x]$ حدودية غير ثابتة و $\deg(f) = n \geq 1$ عندها نقول عن $f(x)$ أنها غير خزولة على K إذا لم نتمكن من كتابة $f(x)$ على شكل جداء حدوديتين من $K[x]$ غير ثابتة ودرجة كلاً منهما أصغر من n.

مثال: $x^2+1 = (x-i)(x+i)$

نلاحظ أن x^2+1 غير خزولة على Q لأن $(x-i), (x+i) \notin Q[x]$ لكن x^2+1 خزولة على $\mathbb{C}$.

مبرهنة 1: لتكن $f(x)$ حدودية من $K[x]$ درجتها 2 أو 3 عندها: $f(x)$ خزولة على $K \Leftrightarrow f(x)$ تملك صفراً في K.

البرهان: $\Leftarrow$ لنفرض أن $f(x)$ خزولة على K عندئذ $f(x) = g(x)\, h(x)$ حيث $g, h \in K[x]$ غير ثابتة ودرجة كلاً منهما أصغر تماماً من درجة f

لدينا $\deg(f) = \deg(g) + \deg(h)$ ومن الفرض $\deg(f) = 2$ أو 3 إذاً على الأقل واحدة من الحدوديتين h, g من الدرجة 1. لنفرض أن $g(x)$ حدودية من

الدرجة 1 إذاً $g(x) = x - \alpha$ في $K[x]$ ومنه

هذا يعني أن $f(x) = (x-\alpha)\, h(x)$

$\alpha \in K$ صفر لـ $f(x)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ لنفرض أن $\beta \in K$ صفر لـ $f(x)$ وبالتالي

$$f(x) = (x-\beta)\,.\,q(x) \qquad (*)$$

حيث $q(x) \in K[x]$ ومن $(*)$ نجد أن $f(x)$ فزولة على K.

مثال: $f(x) = (x^2-2)(x^2-3)$

نلاحظ أن f فزولة على Q وليس لها أصفار في Q

وهذا يناقض المبرهنة السابقة لأن f من الدرجة الرابعة.

مبرهنة 2) لتكن $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

حدودية من الدرجة n عندها لنفرض أن هذه الحدودية

تملك صفراً من الشكل $\frac{a}{b} \in Q$ حيث $(\gcd(a,b) = 1)$

عندها $a \mid a_0$ و $b \mid a_n$

مثال. لتكن $f(x) = x^3 + 19x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$.

أثبت أن $f(x)$ غير فزولة على Q.

الحل: لنفرض وجود صفر α للحدودية $f(x)$ في Q إذاً

هذا الصفر له الشكل التالي $\alpha = \frac{a}{b} \in Q$ بحيث

$b \mid 1$ و $a \mid 3$ ومنه نجد أن

أو $a = 3, -3$ أو $1, -1$ و $b = 1$ أو -1

وبالتالي $\alpha \in \{1, -1, 3, -3\}$ ومنه نجد أن

$f(1) \neq 0 \quad , \quad f(3) \neq 0$

$f(-1) \neq 0 \quad , \quad f(-3) \neq 0$

وحسب المبرهنة 2 نجد أن $f(x)$ لا تملك صفر في $\mathbb{Q}$ وبأن $\deg(f)=3$ فحسب المبرهنة 1 نجد أن $f(x)$ غير خزولة على $\mathbb{Q}$.

مبرهنة غاوس: لتكن $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ غير ثابتة عندها:
$f(x)$ تملك صفري في $\mathbb{Q}$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ تملك صفري في $\mathbb{Z}$

مثال: برهن أن $f(x)=x^4-2x^3+x+1\in\mathbb{Z}[x]$ (^^) غير خزولة على $\mathbb{Q}$.

الحل: لنفرض $\alpha=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ صفر لـ $f(x)$ عندها
$a\mid 1=a_0$, $b\mid 1=a_n$ إذاً
$\alpha\in\{1,-1\}$ لكن $f(-1)\neq 0$ و $f(1)\neq 0$
إذاً $f(x)$ لا تملك صفر في $\mathbb{Q}$.

• بقي دراسة إمكانية تحليل $f(x)$ إلى جداء حدوديتين من الدرجة 2 في $\mathbb{Q}[x]$. لنفرض

التحليل في $\mathbb{Q}[x]$

$$f(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)\cdot(a_2x^2+b_2x+c_2)$$
$$f(x)=a_1\left(x^2+\frac{b_1}{a_1}x+\frac{c_1}{a_1}\right)\cdot a_2\left(x^2+\frac{b_2}{a_2}x+\frac{c_2}{a_2}\right)$$

وبدون خسارة عمومية المسألة يمكن أن نفرض

$$f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$
$$f(x)=x^4+(c+a)x^3+(d+ac+b)x^2+(ad+bc)x+bd$$

وبالمطابقة مع (^^) نجد

$1=1$ --- ①
$-2=c+a$ --- ②
$0=d+ac+b$ ---③
$1=ad+bc$ --- ④
$1=b\cdot d$ ---- ⑤

وحسب مبرهنة غاوس، ومن المعادلة ⑤ نجد أن

إما $b=1 \wedge d=1$

عندئذٍ نعوض في ④ نجد $1=a+c$

لكن من ② نجد $-2=c+a$ وهذا تناقض

أو $b=-1 \wedge d=-1$

عندئذٍ نعوض في ④ فنجد $1=-(a+c)$

لكن من ② نجد $-2=c+a$ وهذا تناقض

⇐ لا يمكن تحليل $f(x)$ إلى جداء حدوديتين من درجة 2 في $\mathbb{Q}[x]$ ⇐ الحدودية $f(x)$ غير فزولة على $\mathbb{Q}$.

توضيح: كون $deg(f)=4$ فإذا كانت f فزولة عندئذٍ يمكن تحليلها إلى:

- جداء حدوديتين من الدرجة 2 ووجدنا أنها غير فزولة
- جداء حدوديتين واحدة من الدرجة 1 وثانية من الدرجة 3 ووجدنا أنها لا تملك جذراً في $\mathbb{Q}$ ومنه f غير فزولة في هذه الحالة أيضاً.

مبرهنة ايزنشتاين: لتكن

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

حدودية غير ثابتة عندها إذا وجد عدد أولي p بحيث

عندها
$$\begin{cases} p \nmid a_n \\ p \mid a_i \quad : i=0,1,\dots,n-1 \\ p^2 \nmid a_0 \end{cases}$$

($\nmid$: لا يقسم)

$f(x)$ غير فزولة على $\mathbb{Q}$.

مثال: $x^3-2 \in \mathbb{Q}[x]$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ وذلك حسب آيزنشتاين حيث $(p=2)$

مثال: $f(x)=16x^5-9x^4+3x^2+6x-21 \in \mathbb{Z}[x]$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ وذلك حسب آيزنشتاين حيث $(p=3)$

وظيفة: برهن أن $f(x)=x^3-4x+1 \in \mathbb{Z}[x]$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

الحل: لنفرض $\alpha=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ جذر لـ $f(x)$ عندها $a \mid 1$, $b \mid 1$ إذاً

$\alpha \in \{1,-1\}$ لكن

$f(1)\neq 0$, $f(-1)\neq 0$

إذاً f لا تقبل جذراً في $\mathbb{Q}$ ودرجتها 3 إذاً $f(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

انتهت المحاضرة

كما في أي شيء آخر كذلك في الرياضيات
يمكن الجمال لمن يمكن شرحه.....

إعداد: شهد الخليلي البوشي