المحاضرة الخامسة

◄ دكتور المادة: شوقي الراشد

◄ عنوان المحاضرة: مراجعات بنى 2

نظري ☑ عملي ☐

تعريف: لتكن R ID.

$0 \neq f(x), g(x) \in R[x]$

نعرف القاسم المشترك الأعظم للحدوديتين $f(x), g(x)$ بأنه $d(x) \in R[x]$ الذي يحقق الشروط:

1) $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$

2) $\exists\, h(x) \in R[x]$; $h \mid f , h \mid g \Rightarrow h \mid d$

ونرمز له بالرمز $\gcd(f,g) = d$

أمثلة: 1) أوجد القاسم المشترك الأعظم للحدوديتين $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = x^3 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$

الحل: $g(x) = (x-1)(x+1)$

$f(x) = (x^2 - x + 1)(x+1)$

$\Rightarrow \gcd(f,g) = (x+1)$

2) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$

$g(x) = x^3 + 4x^2 + 7x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$

الحل: نحلل إلى جداء عوامل

$f(x) = (x+1)(x-1)(x^2 + 2x + 3)$

$g(x) = (x+2)(x^2 + 2x + 3)$

$\Rightarrow \gcd(f,g) = x^2 + 2x + 3$

مبرهنة: لتكن R حقل، إذا كان $0 \neq f(x), g(x) \in R[x]$ فإنه يوجد قاسم مشترك أعظم $\gcd(f,g) = d$ أي $d(x) \in R[x]$ ويوجد $s(x), v(x) \in R[x]$ تحققان

$d = s.f + v.g$

"العكس غير صحيح بالضرورة"

وتسمى مبرهنة بيزو

أمثلة: 1) أوجد القاسم المشترك الأعظم $d(x)$ للحدوديتين $f(x), g(x)$ ثم عين حدوديتين $s(x), t(x)$ تحققان

$d = t.f + s.g$

لكل من الحالات التالية:

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}$

$g(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}[x]$

إن $d(x)$ موجود كون f, g معرفتان على حقل وإن $\deg(g) = 2 < \deg(f) = 3$

حسب خوارزمية القسمة

$\exists\, q(x) = (x+1), r(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f = q.g + r$

نطبق خوارزمية القسمة مرة أخرى بالنسبة لـ g, r ونجد

$g(x) = (\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}).r + 0$

$\Rightarrow d(x) = x - \frac{1}{3}$; $\frac{3}{4} d(x) = r(x)$

إن $f = q.g + r =$

$\Rightarrow d(x) = \frac{4}{3} f(x) - \frac{4}{3}(x+1).g(x)$

ملاحظة: نطبق خوارزمية الحل على f, g ثم على r_1, g وهكذا حتى الحصول على باقي صفري أو إمكانية إيجاد القاسم من r_1, r_2 ......

2) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 1 \in Q[x]$

$g(x) = x^3 - 1 \in Q[x]$

الحل:

$f(x) = (x-1).g(x) + r_1(x)$

وكذلك حسب خوارزمية القسمة

$g(x) = (-x-1) r_1(x) + r_2(x)$

: $r_1(x) = -x^2 + x$

$r_2(x) = x - 1$

$\Rightarrow d(x) = x - 1$

ولنوجد s, t

$r_1(x) = f(x) - (x-1).g(x)$

$\Rightarrow d(x) = r_2(x) = g(x) + (x+1) r_1(x)$

$= g(x) + (x+1)[f(x) - (x-1).g(x)]$

$d(x) = g(x) + (x+1).f(x) - (x^2-1).g(x)$

$= (x+1) f(x) - x^2 . g(x)$

حيث $r(x) = (x+1)$

$t(x) = -x^2$

3) $f(x) = x^5 + 2x^3 + x^2 + 2x \in Z_3[x]$

$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 \in Z_3[x]$

الحل: Z_3 حقل فالقاسم موجود

$deg(f) > deg(g)$

حسب خوارزمية القسمة

$f(x) = (x+2).g(x) + r_1(x)$

$g(x) = 2x . r_1(x)$; $2^{-1} = 2$

$\Rightarrow 2d(x) = r_1(x) = 2(x^3 + x^2 + x)$

$= f(x) - (x+2) g(x)$

$\Rightarrow d(x) = 2f(x) - 2(x+2).g(x)$

$= s(x) f(x) + t(x).g(x)$

تعريف: ليكن F حقل، $0 \neq f, g \in F[x]$ نقول عن f, g الحدوديتين إنهما أوليتين نسبياً إذا كان $gcd(f,g) \in F$.

انتهت المحاضرة

إعداد وكتابة

AhmadAboAltot

◄ دكتور المادة: شوقي الراشد

◄ عنوان المحاضرة: مراجعات بنى 2

نظري ☑
عملي ☐

مثال على التعريف الموجود في المحاضرة الخامسة:

مثال: $f(x)=x^3+1\in\mathbb{R}[x]$

$g(x)=x^2+1\in\mathbb{R}[x]$

اوجد $gcd(f,g)$ وهل هما أوليان فيما بينهما

الحل: $f(x)=x(x^2+1)+(-x+1)$

نقسم g على r_1: $r_1(x)=-x+1$

$\Rightarrow g(x)=(-x+1)(-x-1)+2$

$\Rightarrow d(x)=2\in\mathbb{R}$

وبالتالي f, g اوليان فيما بينهما

تعريف: لتكن $\mathbb{R}$ حلقة واحدية تبديلية نقول عن $0\neq f\in\mathbb{R}[x]$ أنها قابلة للاختزال إذا كان يوجد $h,g\in\mathbb{R}[x]$ بحيث $f=g.h$

$0<deg(g)<deg(f)$

$0<deg(h)<deg(f)$

أمثلة: 1) $f_1=x^2+x,\ f_2=x^2+1$

$f_3=x^2\in\mathbb{Z}_2[x]$

الحل: $f_1=x(x+1)$

قابلة في $\mathbb{Z}_2[x]$: $f_2=(x+1)(x+1)$

$f_3=x^2=x.x$

أما $f_4=x^2+x+1$ ليست قابلة للاختزال

2) $f(x)=x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$

الحل: لنفرض جدلاً أنها قابلة للاختزال على $\mathbb{Q}$:

$f(x)=(x+a)(x+b);\ a,b\in\mathbb{Q}$

$=x^2+(a+b)x+a.b$

بالمطابقة نجد أن:

$a.b=-2$

$a+b=0\Rightarrow a=-b$

$\Rightarrow -a^2=-2$

$\Rightarrow a=\mp\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

ومنه غير قابلة للاختزال في $\mathbb{Q}$

مثال 3: إذا كانت $\mathbb{R}$ لا تحوي قواسم للصفر، $f(x)\in\mathbb{R}[x]$; $deg(f)=1$

هل f قابلة للتحليل؟

الحل: لنفرض جدلاً أنه

$\exists\, h,g \in R[X] : f = g.h$

$deg(g) < deg(f)$

$deg(h) < deg(f)$

$\Rightarrow deg(g) = deg(h) = 0$

وهذا مرفوض حسب التعريف.

مبرهنة: ليكن F حقل و $f,g,p \in F[X]$

إذا كان p غير قابل للاختزال

فإن $p \mid f.g$ فإنه إما

$p \mid g$ أو $p \mid f$

الاثبات: لنفرض أن ...

p لا يقسم f وبالتالي $gcd(f,p) = a$

حسب مبرهنة بيزو

$\exists\, r,s : a = r.f + s.p$

نضرب الطرفين بـ g

$\Rightarrow a.g = r.f.g + s.p.g$

ولكن $p \mid f.g$ وبالتالي يوجد $h \in F$

$: f.g = p.h$

$\Rightarrow a.g = r.h.p + s.p.g$

$= p(r.h + s.g)$

ومنه $p \mid g$ وهو المطلوب

تعريف: ليكن $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in Z[X]$

تسمى f كثيرة حدود بدائية إذا كان

$gcd(a_0, \dots, a_n) = 1$ ونرمز لذلك بالرمز

$C(f(x)) = 1$

مثال: $f(x) = 4x^2 - 3x + 6$

$g(x) = 8x^3 - 2x^2 + 6x - 4$

الحل: $gcd(4,-3,6) = \mp 1$

$gcd(8,-2,6,-4) = \mp 2$

مبرهنة: ليكن p عدد أولي و $f,g \in Z[X]$

فإن القضايا التالية صحيحة:

1) f, g بدائيتان $\Leftrightarrow$ $f.g$ بدائية.

2) f غير قابلة للاختزال على Z إذا كانت

كثيرة الحدود f قابلة للاختزال على Q.

البرهان:

1) لنفرض جدلاً أن $h = f.g$

$h(x) = \sum_{k=0}^{m+n} x^k . c_k$

ليست بدائية وبالتالي يوجد عدد أولي p

بحيث $\forall k \in [0, \dots, m+n]$

$: p \mid c_k$

بما أن f,g بدائيتان يوجد a_r, $p \nmid a_r$

$p \nmid b_s$ حيث a_r, b_s معاملات f, g

من أول الأصغر r و أصغر s يحققان ذلك

$0 \le s \le m \ , \ 0 \le r \le n$

$c_{r+s} = a_0 b_{r+s} + a_1 b_{r+s-1} + \dots$

$a_r . b_s + a_{r+1} . b_{s-1} + \dots \ a_{r+s} . b_0$

$\Rightarrow a_r . b_s = c_{r+s} - (a_0 b_{r+s} + \dots a_{r+1} . b_{s-1} \dots)$

وهذا الطرف ~~[illegible]~~ الأيمن يقبل القسمة على p ومنه لما $p \mid a_r$ أو $p \mid b_s$

وذلك حسب إقليدس وفي كلا الحالتين هذا غير ممكن ومنه الفرض الجدلي خاطئ ومنه $\mu(x)$ البدائية

2) $\Rightarrow$ لنفرض f قابلة للاختزال على $Z[x]$

ومنه يوجد $h, g \in Z[x]$

حيث: $f = h . g$

$0 < deg(h) < deg(f)$

$0 < deg(g) < deg(f)$

ولكن $Z[x] \subseteq Q[x]$

ومنه $f(x)$ قابلة للاختزال على Q ,

$\Leftarrow$ دون المبرهنة العكسية

إن f بدائية وأن f قابلة للاختزال على Q وأنه حسب المبرهنة السابقة يمكن أن نكتب

$h(x) = \frac{a'}{b'} . \mu(x)$

$g(x) = \frac{a''}{b''} . \psi(x) \; ; \; \mu(x), \psi(x) \in Z(x)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{a}{b} . \mu(x) . \psi(x)$

$a = a' . a'' , b = b' . b''$

ومنه ① $\mu(x), \psi(x)$ البدائية

$\Rightarrow \underbrace{b}_{\in Z} . \underbrace{f}_{\in Z(x)} = a . \mu(x) . \psi(x) \in Z[x]$

ولكن $gcd(b . f) = b$

$= gcd(b a_1 , \dots b a_n)$

$= gcd(a \mu(x) , \psi(x)) = a$

$\Rightarrow a = b \Rightarrow \frac{a}{b} = 1$

$\Rightarrow f(x) = \mu(x) . \psi(x) \in Z[x]$

$\Rightarrow 0 < deg(\psi) < deg(f)$

$0 < deg(\mu) < deg(f)$

ومنه f قابلة للاختزال على Z

انتهت المحاضرة

إعداد وتقديم:

Ahmad Abo Al tot