◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة : السادسة

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالمعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى.

٢ـطريقة برنولي.

٣ـ أمثلة عما سبق .

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى أنها خطية إذا كانت من الشكل:

$$y' + p(x).y = q(x) \qquad (1)$$

نلاحظ هنا أنه إذا كانت : $q(x) = 0$ فإن $y' + p(x).y = 0$

نسمي المعادلة التفاضلية متجانسة و بدون طرف ثاني.

و المعادلة مع طرف ثاني ندعوها معادلة تفاضلية غير متجانسة.

و لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية بطريقة تحويل الثوابت نتبع الخطوات التالية:

١) نوجد حل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' + p(x).y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x).y \ \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x).dx$$

$$\Rightarrow ln|y| = -\int p(x)\,.\,dx + ln|c| \Rightarrow ln|y| - ln|c| = -\int p(x)\,.\,dx$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int p(x)\,.\,dx \;\Rightarrow\; \frac{y}{c} = e^{-\int p(x).dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c.e^{-\int p(x).dx}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (دون طرف ثانٍ).

٢) نجعل الثابت c تابع ل x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x).e^{-\int p(x).dx} \ldots (2)$$

ثمَّ نشتق الطرفين بالنسبة لـ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).e^{-\int p(x).dx} - c(x).p(x).e^{-\int p(x).dx} \ldots (3)$$

والآن نعوض (2) و (3) في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ (1):

$$\Rightarrow c'(x).e^{-\int p(x).dx} - c(x).p(x).e^{-\int p(x).dx} + p(x)c(x).e^{-\int p(x).dx} = q(x)$$

ملاحظة :

سيتم من خلال حل المعادلة اختصار الحدين والا فان هناك خطأ في الحل

$$\Rightarrow c'(x).e^{-\int p(x).dx} = q(x) \;\Rightarrow c'(x).\frac{1}{e^{\int p(x).dx}} = q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = e^{\int p(x).dx}.q(x)$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \int q(x).e^{\int p(x).dx}.dx + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة (2) فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x).e^{\int p(x).dx}.dx + c_1\right]$$

مثال:

أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية:

$$1. (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$$

الحل:

نقسم الطرفين على $(1+x^2) \neq 0$:

$$\Rightarrow y' - \frac{2x}{1+x^2}.y = 1 + x^2 \quad **$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام لها نتبع الخطوات السابقة:

١) نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}.y = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x}{1+x^2}.y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}.y \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}.dx$$

$$\Rightarrow ln|y| = ln|1+x^2| + ln|c| \Rightarrow ln|y| - ln|c| = ln|1+x^2|$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{y}{c}\right| = ln|1+x^2| \Rightarrow \frac{y}{c} = 1 + x^2 \Rightarrow y = (1+x^2)c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (دون طرف ثانٍ).

و لإيجاد الحل العام للمعادلة مع طرف ثاني نجعل الثابت c تابع لـ x فنكتب:

$$y = c(x).(1+x^2) \ldots (1)$$

نشتق بالنسبة لـ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).(1+x^2) + 2x.c(x) \ldots (2)$$

نعوض (1) و (2) في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ ** :

$$\Rightarrow c'(x).(1+x^2) + 2x.c(x) - \frac{2x}{1+x^2}.c(x).(1+x^2) = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow c'(x).(1+x^2) = 1 + x^2 \Rightarrow c'(x) = 1$$

نكامل فنجد: $c(x) = x + c_1$

نعوض في * $\quad y = (x+c)(1+x^2)$

$$\boldsymbol{y' + y.\tan x = \frac{1}{\cos x}}$$

الحل:

هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام لها نتبع الخطوات السابقة ذاتها:

نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' + y.\tan x = 0 \Rightarrow y' = -y.\tan x = -y.\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y.\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x}.dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|c| \Rightarrow \ln|y| - \ln|c| = \ln|\cos x|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right| = \ln|\cos x| \Rightarrow \frac{y}{c} = \cos x \Rightarrow y = c\,.\cos x \ldots (1)$$

نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لـ x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x).\cos x \ldots (*)$$

ثمَّ نشتق بالنسبة لـ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).\cos x - \sin x\,.c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x).\cos x - \sin x\,.c(x) + c(x).\sin x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow c'(x).\cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

نكامل الطرفين: $\Rightarrow c(x) = \tan x + c_1$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة $(*)$ فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$y_2 = (\tan x + c_1).\cos x = \sin x + c_1.\cos x$$

طريقة برنولي:

$$y' + p(x)y = q(x) \ldots (1)$$

نفرض أن $y = u.v$ حيث $v = v(x)$ و $u = u(x)$

نشتق y لنحصل على $y' = u'v + v'u$

نعوض في (١): $u'v + uv' + p(x)u.v = q(x)$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \ldots (2)$$

نفرض أنّ:

$$v' + p(x)v = 0$$

و هي معادلة قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \rightarrow \text{نكامل} \rightarrow ln|v| = -\int p(x)dx + ln|c|$$

و منه فإن

$$v = c.e^{-\int p(x)dx} \dots *$$

نعوض * في (٢)

$$c.e^{-\int p(x)dx}.\frac{du}{dx} + 0 = q(x)$$

$$\frac{du}{dx} = q(x).\frac{1}{c}.e^{\int P(x)dx}$$

و منه فإن:

$$du = q(x).\frac{1}{c}.e^{p(x)dx}\ dx$$

$$u = \int q(x).c_1.e^{p(x).dx}.dx$$

نعوض $u.v$ في الفرض $y = u.v$ وهو الحل العام بطريقة برنولي

وظيفة ولكننا سندرج حلها هنا ..

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية (بالاعتماد على طريقة برنولي).

$$y' - \frac{2x}{x^2+3}y = (x^2+3)cosx \dots (1)$$

الحل:

نفرض أن $y = u.v$ حيث $v = v(x)$ و $u = u(x)$

نشتق y لنحصل على $y' = u'v + v'u$

و نعوض في (١) لنحصل على:

$$u'v + v'u - \frac{2x}{x^2+3}u.v = (x^2+3)cosx$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+3}v\right) = (x^2+3)cosx \dots *$$

نفرض $v' - \frac{2x}{x^2+3}v = 0$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2+3}\,dx$$ منه

$$\ln|v| = \ln|x^2+3| \quad \rightarrow \quad v = (x^2+3)$$

و منه نعوض في * لتصبح المعادلة

$$u'(x^2+3) = (x^2+3)cosx$$

$$du = cosx\,dx \quad \rightarrow \quad u = sinx + c$$ نكامل

و منه $y = u.v$ فإن المعادلة تصبح كلاتي:

$$y = (sinx + c)(x^2+3)$$

و هو الحل العام المطلوب بطريقة برنولي..

مثال:

$$y' - 2xy = 2e^x \ldots.(1)$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية (بالاعتماد على طريقة برنولي).

الحل:

نفرض أن $y = u.v$ حيث $v = v(x)$ و $u = u(x)$

نشتق y لنحصل على $y' = u'v + v'u$

و نعوض في (١) لنحصل على:

$$u'.v + u.v' - 2x(u.v) = 2e^x$$

بإخراج u عامل مشترك: $u'v + u[v' - 2xv] = 2e^x \ldots.(2)$

$v' - 2xv = 0$ معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2xv \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2xdx \xRightarrow[\text{بالمكاملة}]{} \ln v = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}$$

نعوض في المعادلة (٢) فنجد ان :

$$u'.e^{x^2} + u[0] = 2e^x \Rightarrow u'.e^{x^2} = 2e^x \Rightarrow \frac{du}{dx}e^{x^2} = 2e^x \Rightarrow du = 2e^{-x}dx$$
$$\Rightarrow u = -2e^{-x} + c_1$$

نعوض $y = u.v$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة بطريقة برنولي.. $\Rightarrow y = (-2e^{-x} + c_1).(e^{x^2})$

ملاحظات هامة:

- ✓ عندما فرضنا: $y = u.v$ ثم اشتقينا المعادلة وقمنا بتعويضها يمكن بعد ذلك ان نخرج v
كعامل مشترك بدلا من u والحل سيكون بنفس الطريقة وبالتكامل الأول أي القيمة الأولى التي نوجدها لا نضع ثابت التكامل لانها قيمة اختيارية
- ✓ الطريقتين مطلوبتين في الامتحان وقد يأتي السؤال "اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية بالطريقتين معاً...

انتهت المحاضرة

إعداد: ماريا عيد☺علا الدالاتي☺محمد أنس القزاز☺

تنسيق: ولاء الأخضر♥