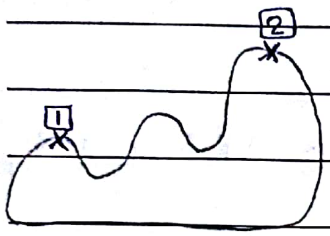
تهتم بحوث العمليات بالحل الأمثل بحيث أنه لدينا مجموعة حلول نختار منها حل بالاعتماد على دالة الهدف

حسب شروط المسألة تتشكل لدينا منطقة حلول



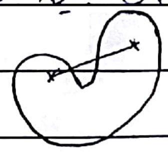
1 هو حل امثل محلي حسب الجوار

2 هو حل امثل كلي

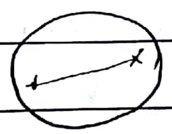
* في حال كانت المجموعة محدبة فإن اي طريقة تكرارية كانت لإيجاد الحل سوف تعطي لنا الحل الأمثل (الأعظمي)

* ## المجموعات المحدبة

رياضياً: اذا كان الخط الواصل بين اي نقطتين ينتمي للمجموعة فهي محدبة



مجموعة غير محدبة



مجموعة محدبة

تعريف: نقول عن مجموعة انها محدبة اذا كان:

$$\forall x,y \in C : \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

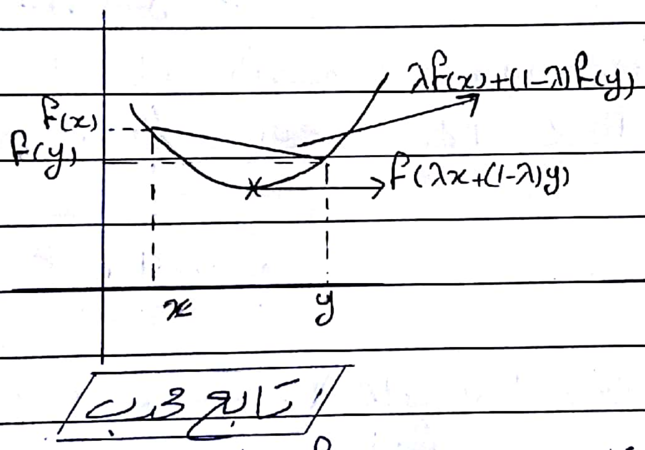
بالتعريف العام للمجموعة المحدبة المعادلة $\lambda x + (1-\lambda) y$ تمثل معادلة مستقيم طرفاها النقطتين x , y

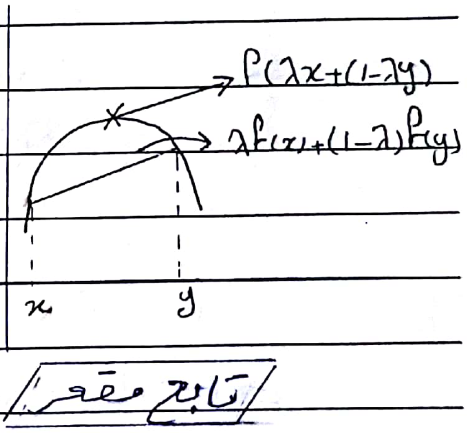
التابع المحدب:

لتكن C مجموعة محدبة فإن التابع $f : C \longrightarrow R$ يكون محدب اذا تحقق
$\forall x,y \in C : \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

التابع المقعر:

لتكن C مجموعة محدبة فإن التابع $f : C \longrightarrow R$ يكون مقعر اذا تحقق
$\forall x,y \in C : \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$





ملاحظة: اذا كان f تابع محدب $\Leftrightarrow$ $-f$ تابع مقعر

أمثلة: هل المجموعات التالية محدبة؟ ولماذا؟

$$C_1 = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 = 1\}$$
$$C_2 = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

C_1 هي مجموعة النقط التي تنتمي لسطح الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1 وبالتالي اي مستقيم يصل بين تلك النقط لا ينتمي لـ C_2

C_2 حسب التعريف: $\forall x,y \in C_2 : x=(x_1,x_2) \Rightarrow x_1^2+x_2^2 \leq 1$
$y=(y_1,y_2) \Rightarrow y_1^2+y_2^2 \leq 1$

$\forall \lambda \in [0,1] : D = \lambda x + (1-\lambda) y = \lambda(x_1, x_2) + (1-\lambda)(y_1, y_2)$

$\Rightarrow (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 , \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)$

((لكي تنتمي لـ C_2 يجب أن تحقق المعادلة $x^2+y^2 \leq 1$))

$\Rightarrow (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^2 + (\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)^2$

$= \lambda^2 \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{\leq 1} + (1-\lambda)^2 \underbrace{(y_1^2 + y_2^2)}_{\leq 1} + 2\lambda(1-\lambda)(x_1 y_1 + x_2 y_2)$

$\leq \lambda^2 + \underbrace{(1-\lambda)^2}_{= \lambda^2 - 2\lambda + 1} + 2\lambda(1-\lambda)(x_1 y_1 + x_2 y_2)$

$= -2\lambda + 2\lambda^2 + 1 + 2\lambda(1-\lambda)(x_1 y_1 + x_2 y_2)$

$= -2\lambda(1-\lambda) + 1 + 2\lambda(1-\lambda)(x_1 y_1 + x_2 y_2)$

$= \lambda(1-\lambda)[-2 + 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2] + 1$

$= \lambda(1-\lambda)[-1 - 1 + 2(x_1 y_1) + 2x_2 y_2] + 1$ ...

((لدينا $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ نضرب بـ $(-) \Leftarrow$ $-1 \leq -x_1^2 - x_2^2$))

$y_1^2 + y_2^2 \leq 1$ نضرب بـ $(-)$ $-1 \leq -y_1^2 - y_2^2$

$\Rightarrow \leq \lambda(1-\lambda)[-x_1^2 - x_2^2 - y_1^2 - y_2^2 + 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2] + 1$

$= \lambda(1-\lambda)[\underbrace{-(x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2}_{\text{مقدار سالب}}] + 1$

كون $\lambda \in [0,1]$ فإن $(1-\lambda)$ عدد موجب وبالتالي ((1 + مقدار سالب))

≤ 1

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in C_2 \Rightarrow$ محدبة C_2

التابع المحدب تماماً والمقعر تماماً

لتكن C مجموعة محدبة ولتكن التابع $f : C \to R$ نقول عن f:

* محدب تماماً: $\forall x, y \in C : \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

* مقعر تماماً: $\forall x, y \in C : \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda y)) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

* خواص المجموعات المحدبة:

[1]- بفرض لدينا $\{C_i : i \in I\}$ مجموعة من مجموعات المحدبة
فإن $\bigcap_{i \in I} C_i$ مجموعة محدبة

[2]- مجموع تشاكيلي من مجموعتين محدبتين هو محدب، بفرض C_1 و C_2 مجموعتين محدبتين فإن $D=\{x_1+x_2 : x_1 \in C_1 , x_2 \in C_2\}$ مجموعة محدبة

[3]- صورة مجموعة محدبة وفق تابع خطي هي مجموعة محدبة

[4]- اذا كانت C مجموعة محدبة و $f: C \longrightarrow R$ تابع محدب فإن:
$A_1=\{x \in C : f(x) \le a\}$, $A_2=\{x \in C : f(x) < a\}$
A_1 و A_2 مجموعات محدبة حيث a ثابت عددي

[5]- $\{f_i : C \longrightarrow R \ , i \in I\}$ مجموعة من التوابع المحدبة فإن:
$f=\sum_{i \in I} \omega_i f_i : C \longrightarrow R$ تابع محدب حيث $\omega_i \geq 0$

[6]- اذا كانت C مجموعة محدبة ; $f_i : C \longrightarrow R$ توابع محدبة $\forall i \in I$
عندها التابع h: $h(x) = \sup_{i \in I} [f_i(x)]$ تابع محدب

[7]- اذا كانت C مجموعة محدبة ; $f: C \longrightarrow R$ قابل للاشتقاق في C
f محدب $\iff$ $f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x) (y-x) \quad \forall x,y \in C$
(1) اذا كانت $x \in R$ فإن $\nabla f(x)$ هو المشتق الاول
في حال كانت $x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ فإن $\nabla^T f(x) = [f_{x_1}, f_{x_2}, \dots f_{x_n}]$

[8]- اذا كانت C مجموعة محدبة ولتكن $f: C \longrightarrow R$ قابل للاشتقاق مرتين في C ومستمر فإن:
اذا كان $\nabla^2 f(x)$ معرف موجب من أجل كل $x \in C$ $\iff$ f محدب
اذا كان $\nabla^2 f(x)$ معرف سالب من أجل كل $x \in C$ $\iff$ f مقعر

ملاحظة (1) نقول عن مصفوفة A انها معرفة موجبة اذا تحقق:
$z^T . A . z \geq 0 \quad : \quad \forall z \neq 0$

[2]

مثال: اثبت ان التابع f المعرف كما يلي محدب: $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$

الحل:

$f_{x_1}=2x_1+2x_2 \Rightarrow f_{x_1x_1}=2 \;,\; f_{x_1x_2}=2$

$f_{x_2}=4x_2+2x_1 \Rightarrow f_{x_2x_2}=4 \quad f_{x_2x_1}=2$

$$\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\forall z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\neq 0 : z^T\nabla^2 f(x) z=[z_1\; z_2]\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow [z_1\; z_2]\begin{bmatrix} 2z_1+2z_2 \\ 2z_1+4z_2 \end{bmatrix}=2z_1^2+2z_1z_2+2z_1z_2+4z_2^2$

$=2(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2)+2z_2^2=2(z_1+z_2)^2+2z_2^2>0$

$\Rightarrow$ f محدب

وظيفة: $\boxed{1}$ هل التوابع التالية محدبة ام مقعرة ام ليست ايهما أو كلاهما؟

$f_1(x,y)=x^2+9y^2+6xy$

$f_2(x,y)=2x-3y-7$

$f_3(x,y)=e^{x_1+x_2}+x_1^2+4x_2^4-2x_1x_2$

$\boxed{2}$ ليكن لدينا $f(x)=e^x+7x^2-3x+4$ بيّن أن:

$e^y+7y^2-3y \geq e^x+7x^2-3x+(e^x+14x-3)\cdot(y-x)$

*** انتهت المحاضرة ***