16-10-2018

نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: الزمرة والزمرة الجزئية

المحتوى العلمي : في هذه المحاضرة سنكمل الحديث عن الزمر والزمر الجزئية وسندرج حل بعض التمارين الهامة المتعلقة بالمجموعات :

- مبرهنات وتمهيديات .
- العمليات على المجموعات .مع أمثلة
- زمرتا الضرب والجمع بالمقاس 4.مع أمثلة

مراجعة : الزمرة هي ثنائية غير خالية مزودة بقانون تشكيل داخلي (تطبيق)

$$\cdot : G \times G \to G$$

يحقق الشرط التالي : $\forall\, a\,,b \in G\ ;a.b \in G$

لتكن $H \subseteq G$ و$\forall\, a.b \in H : a.b^{-1} \in H$ عندها تكون H زمرة جزئية في G .

مبرهنة: لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية منتهية في G فإن الشرط الازم والكافي كي تكون H زمرة جزئية في G هو أن يتحقق الشرط : $\forall\, a,b \in H \quad ; \quad a.b \in H$

البرهان

١) لزوم الشرط : لنفرض أن H زمرة جزئية فإنها تحقق الشرط:
$$\forall\, a,b \in H ;\ a.b \in H$$

٢) كفاية الشرط : لنفرض أن H تحقق الشرط $\forall\, a,b \in H ; a.b \in H$
ولنبرهن على انه
$$\forall\, a \in H ;\ a^{-1} \in H$$

- ليكن $a \in H$ نميز حالتين :

١) $a = e$ عندئذ $a^{-1} = e^{-1} = e \in H$

٢) $a \neq e$ وحسب الشرط اذا كان $\Leftarrow a, a^2, a^3, \ldots \ldots, a^n \in H$

وبما أن H منتهية يوجد $i,j \in N^*$ بحيث $i \neq j$ و أن $a^i = a^j$ وكون $i \neq j$ نفرض أن $i > j$ عندئذ $i - j > 0$

نضرب بمقلوب a^{j} : $a^{i-j}=e$ ولما كان $a\neq e$ فإن $i-j\neq 1$ لأنه بحالة $i-j=1$ تصبح $e=a$ و هذا يؤدي الى تناقض ..

ومنه فإن ال $i-j>1$ وبالتالي: $i-j-1>0$ أي $a.a^{i-j-1}=e$

وإن $a^{i-j-1}\in H$ ومنه نجد ان $a^{-1}=a^{i-j-1}\in H$

مما سبق نجد أن H زمرة جزئية في G.

مثال على زمرة جزئية موجودة في كل الزمر :

لتكن G زمرة المجموعة $(G)=\{a:a\in G\,;ax=xa\quad\forall\,x\in G\,\}$

هي زمرة جزئية في G تسمى مركز الزمرة G

البرهان

بما أن $x=ex=xe$ أيا كان $x\in G$ نجد ان $e\in\mathbb{Z}(G)\neq\emptyset$

ليكن $a\,,b\in\mathbb{Z}(G)$ عندئذ أيا كان $x\in\mathbb{Z}(G)$ فإن $b\,x=x\,b$ وبالتالي $x\,b^{-1}=b^{-1}x$

كذلك بما أن $a\in\mathbb{Z}(G)$ فإن $a\,b^{-1}=b^{-1}a$ ومنه

$$(ab^{-1})x=a\,(b^{-1}x)=a(xb^{-1})=(xb^{-1})a=x(b^{-1}a)=x(ab^{-1})$$

وذلك أيا كان $x\in G$ و هذا يبين لنا أن المجموعة $\mathbb{Z}(G)$ زمرة جزئية وتبديلية

لأنه من تعريف $\mathbb{Z}(G)$

فإن $\forall a\,,b\in\mathbb{Z}(G)\,;\,a.b=b.a$

العمليات على المجموعات

سندرس تأثير عملية التقاطع على زمرة الزمرة الجزئية من خلال التمهيدية التالية :

تمهيدية : لتكن G زمرة وان تقاطع أي أسرة من الزمر الجزئية في G تشكل زمرة جزئية ايضاً.

البرهان :

لتكن G زمرة و $\sum$ أسرة من الزمر الجزئية في G ولنفرض أن $K=\cap A$ حيث $A\in\sum$

إن $e\in k\subseteq G$ لأنه $e\in A$ أيا كان $A\in\sum$ وليكن $a,b\in K$ عندئذ $a,b\in A$ ولما كان A زمرة جزئية في G كان $a\,.b^{-1}\in A$

وبالتالي $K = A \cap \in a\,.\,b^{-1}$ ومنه K زمرة جزئية في G .

ملاحظة : وجدنا حسب التمهيدية السابقة أن تقاطع أي عدد من الزمر الجزئية هو زمرة جزئية فهل هذا صحيح بالنسبة لعملية الاجتماع ؟؟ في الحالة العامة يمكننا القول أن اجتماع زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون جزئية وهذا ما سوف يوضحه المثال التالي :

مثال : ليكن $1 \geq n$ عددا صحيحا وجدنا سابقا أن المجموعة $n\mathbb{Z}$هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ومنه فإن كلا من $2\mathbb{Z}\,,5\mathbb{Z}$ هي زمر جزئية من $\mathbb{Z}$ (تمثل مضاعفا العددين $5\,,\,7$ على الترتيب) بينما $2\mathbb{Z}\,,5\mathbb{Z}$ليس زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ لأن $5\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z} \in 2\,,5$ بينما $5\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z} \notin 2+5=7$ من جهة أخرى نجد ان المجموعة $2\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z}$ تشكل زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ لأنه $2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}$

مبرهنة : إن الشرط اللازم والكافي كي يكون اجتماع زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية هو أن يكون أحد الزمرتين محتوى في الزمرة الثانية أي لتكن $H\,,\,K$ زمرتين جزئيتين في G عندئذ $H \cup K$ زمرة جزئية من G عندما وفقط عندما $H \subseteq K$ أو $K \subseteq H$

البرهان :

لزوم الشرط : لنفرض أن $H \cup K$ زمرة جزئية من G ولنفرض جدلا أن $H \not\subset K$ و $K \not\subset H$

عندئذ يوجد $h \in H$ بحيث $h \notin K$ و $k \in K$ بحيث $k \notin H$

ولكون $h\,,k \in K \cup H$ ولكون $K \cup H$زمرة فإن $hk \in k \cup H$

لنفرض أن $x = hk$بما أن $x \in k \cup H$ عندئذ إما $x \in H$ أو $x \in k$

إذا كان $x \in H$ عندئذ $k = h^{-1}x \in H$ وهذا يناقض الفرض

إذا كان $x \in K$ عندئذ $h = k^{-1}x \in K$ وهذا يناقض الفرض أيضا

مما سبق نجد أنه إما $k \subseteq H$ أو $H \subseteq K$ ..

زمرة الجمع بالمقاس n

- : ليكن $1 \geq n$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة $Z_n = \{0,1,2,\dots\dots(n-1)\}$
  لنعرّف على المجموعة Z_n عملية ثنائية جمعية $\oplus$ بالشكل الآتي:
  $$\forall a,b \in Z_n\,;a\oplus b = r \in Z_n$$

حيث r (ناتج الجمع) هو باقي قسمة $a\oplus b$ على n.

حسب خوارزمية القسمة فإن : $a+b=qn+r$

إذا كان $n=5$: $Z_5=\{0,1,2,3,4\}$

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

فمثلا $0\oplus 0=0\,.\,5+0$

لأن $0\div 5=0$ ، $0+0=0$

الباقي (0) الجواب هو الباقي r

و $3\oplus 4=2$

لان $3+4=7$ و $7\div 5=2$ الباقي (2) هو الجواب

وهكذا مع بقية الأعداد …

ـ نلاحظ أن العملية ثنائية لأن كل عنصر في كل سطر يتكرر مرة واحدة (إذا تكرر أكثر من مرة أو لم يتكرر لا يكون تطبيق)

ـ نلاحظ أن مقابل الصفر تتكرر نفس العناصر أي أن الصفر في عملية الجمع لا يؤثر على العناصر وبذلك يكون هو المحايد ..

لكل عنصر نظير والدليل على ذلك ظهور المحايد في كل سطر

نظير 1 هو 4 ونظير 2 هو 3 ونظير 3 هو 2 ونظير 4 هو 1

$$-1=4\ ,-2=3\ ,-3=2\ ,-4=1$$

يبقى إثبات أنها تجميعية لتكون زمرة وإثبات ذلك وظيفة ..

إذا Z_n زمرة جمعية تبديلية ومنتهية ..

زمرة الضرب بالمقاس n

- ليكن $n>1$ عدد صحيح لنأخذ المجموعة

$$U(n)=\{m: m\in\mathbb{Z}\ ;1\le m<n: gcd(m,n)=1\}$$

لنعرّف على المجموعة $U(n)$ عملية ضرب $\otimes$بالمقاس n بالشكل الاتي:

$$\forall a,b\in U(n); a\odot b=r\in\mathbb{Z}$$

وحسب خوارزمية القسمة يوجد $\mathbb{Z}\ \in\ r\,,q$ بحيث $ab=qn+r$ وأن $1\le r<n$

فيكون $a\otimes b=r$

من أجل $n = 9$ يكون : $u(9) = \{1,2,4,5,7,8\}$

من اجل $n = 6$ يكون : $u(6) = \{1,5\}$

لنأخذ $u(5) = \{1,2,3,4\}$ $\Longleftarrow$

لأن $2 \otimes 2 = 4$

$4 = 0.5 + 4$

$8 = 1.5 + 3$

$9 = 1.5 + 4$

$6 = 1.5 + 1$

$12 = 2.5 + 2$

نلاحظ الناتج هو باقي القسمة ..

$\odot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

العملية تطبيق لأن كل عنصر يتكرر مرة واحدة في كل سطر (عمود)

المحايد هو الواحد وهو مكرر في كل سطر (عمود)

لكل عنصر مقلوب لأن المحايد موجود في كل سطر (عمود)

ومقلوب العدد هو ما يقابله بالنسبة للمحايد

مقلوب 1 هو 1^{-1} مقلوب 2 هو 3 وتكتب بالشكل :

$$1^{-1} = 1 \;,\; 2^{-1} = 3 \;,\; 4^{-1} = 4 \;,\; 3^{-1} = 2$$

يبقى إثبات أنها تجميعية والاثبات وظيفة ..

إذا $U(5)$ زمرة ضربية تبديلية منتهية ..

ملاحظة : تبديلية لأنها متناظرة بالنسبة لعناصر القطر الرئيسي

انتهت المحاضرة

إعداد: رهف دادا – آية اليافي – آية بسيكي // تنسيق: ولاء الأخضر