نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الثالثة ◄ عنوان المحاضرة: علاقات الترتيب

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتعاريف.

٣ـ مبرهنات./ أمثلة.

**ـ كما عرفنا سابقاً** ان علاقة الترتيب هي علاقة ( انعكاسية ـ تخالفيه ـ متعدية ).

**مثال :** لتكن $P$ مجموعة غير خالية و $\sum$ أسرة من المجموعات الجزئية من $P$ عملية الاحتواء على $\sum$ هو علاقة ترتيب ..

**تعريف :** لتكن $P$ مجموعة غير خالية و $\mathcal{P}$ علاقة ترتيب ( انعكاسية ـ تخالفية ـ متعدية ) على $P$ :

١) نرمز لعلاقة الترتيب $\mathcal{P}$ بالشكل $\leq$ .

$$\forall a, b \in P : a \leq b \iff \begin{cases} a = b \\ a < b \end{cases}$$

٢) نسمى الثنائية $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً

**مثال:**

- مجموعة الاعداد الطبيعية هي مجموعة مرتبة جزئياً
$$0 < 1 < 2 < 3 \ldots$$
- مجموعة الاعداد الصحيحة هي مجموعة مرتبة جزئيا

$$\dots . < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \cdots$$

- توجد اكثر من علاقة ترتيب على المجموعة الواحدة مثلا

ان مجموعة الاعداد الصحيحة مرتبة وفق علاقة ترتيب أخرى بالشكل :

$$0 < 1 < 2 \cdots < -1 < -2 < \cdots$$

---

**مبرهنة :** لتكن $P$ مجموعة غير خالية ولتكن $\leq$ علاقة انعكاسية ومتعدية معرفة على $P$ عندئذ :

١) العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة على $P$ بالشكل الاتي :

$$\forall a, b \in P : a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$$

هي علاقة تكافؤ على $P$ .

٢) العلاقة $(\leq)$ المعرفة على مجموعة الخارج $P/_{\mathcal{P}}$ بالشكل الاتي :

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in P/_{\mathcal{P}} ; \bar{a} \leq \bar{b} \Leftrightarrow a \leq b$$

هي علاقة ترتيب جزئي على $P/_{\mathcal{P}}$.

## البرهان :

١) لنثبت انها انعكاسية :

$$\forall a \in P : a \leq a \Leftrightarrow a\mathcal{P}a$$

وانها تناظرية لان

$$\forall a, b \in P : a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a \Leftrightarrow b \leq a \wedge a \leq b \Leftrightarrow b\mathcal{P}a$$

وانها متعدية لان

$$\forall a, b \in P : a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$$

$$\forall c, b \in P : b\mathcal{P}c \Leftrightarrow b \leq c \wedge c \leq b$$

ولكن $\leq$ متعدية منه $a \leq c \wedge c \leq a \Leftrightarrow a\mathcal{P}c$

أي أن العلاقة $\mathcal{P}$ متعدية

٢) ليكن $\bar{a} \in P/_{\mathcal{P}}$ عندئذ $a \in P$ وان $a \leq a$ ومنه $\bar{a} \leq \bar{a}$ وبالتالي العلاقة $\leq$ انعكاسية .

ليكن $\bar{a}, \bar{b} \in P/_{\mathcal{P}}$ بحيث $\bar{b} \leq \bar{a}$ و$\bar{a} \leq \bar{b}$ عندئذ $a, b \in P$ وان $a \leq b,\ b \leq a$

وحسب (١) فإن $a\mathcal{P}b$ ومنه $a \in \bar{b}$**(احدهما ينتمي لصف تكافؤ الاخر)**

ومنه $\Leftarrow \bar{a} = \bar{b}$ العلاقة $\leq$ تخالفية

لنفرض أولا على أن العلاقة $(\leq)$ معرفة جيدا

$$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in P_{/\mathcal{P}}$$

لنفرض أن : $\bar{c} = \bar{d}$ , $\bar{a} = \bar{b}$

ولنفرض أن : $\overline{a} \le \overline{c}\ (*)$

ولنبرهن على أن : $\overline{b} \le \overline{d}$

لدينا من $(*)\ \underbrace{a \le c}_{\text{فرضا}} \Leftarrow$ و أيضا

$$a \in \overline{b} \quad , \quad c \in \overline{d}$$
$$a\mathcal{P}b \quad , \quad c\mathcal{P}d$$

$$\Leftarrow \begin{cases} a \le b & c \le d \\ b \le a & d \le c \end{cases} \text{فرضيات}$$

$$a \le c \ \wedge \ c \le d \ \Rightarrow a \le d$$
$$b \le a \ \wedge \ a \le d \ \Rightarrow b \le d$$

وحسب التعريف فإن : $\overline{b} \le \overline{d}$

و هذا يبين أن العلاقة $\preceq$ معرفة جيدا ...

وبما ان $\forall a, b, c \in P$ فإن $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in P_{/\mathcal{P}}$

ولنفرض أن $\overline{b} \le \overline{c}$ و $\overline{a} \le \overline{b}$ حسب التعريف :

$$a \le b \ \wedge \ b \le c \quad \Rightarrow a \le c \quad \Rightarrow \quad \overline{a} \le \overline{c}$$

ومنه العلاقة متعدية وبالتالي فهي علاقة ترتيب ... وهو المطلوب .

**تعاريف :** لتكن $(P, \preceq)$ مجموعة مرتبة جزئياً:

١) نقول عن العنصر $a \in P$ إنه عنصر **أصغر** في المجموعة $P$ إذا حقق :

$$\forall x \in P;\ a \le x$$

٢) نقول عن العنصر $b \in P$ إنه عنصر **أصغري** في المجموعة $P$ إذا حقق :

$$\forall y \in P; y \le b \Rightarrow y = b$$

٣) نقول عن العنصر $a \in P$ أنه عنصر **أكبر** في المجموعة $P$ إذا حقق :

$$\forall x \in P: x \le a$$

٤) نقول عن العنصر $b \in P$ أنه عنصر **أعظمي** في المجموعة $P$ إذا حقق :

$$\forall y \in P, b \le y \Rightarrow b = y$$

**مثال:**

- في مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ إن :

$$1 < 2 < 3 \cdots$$

الواحد هو عنصر أصغر و أصغري .

- في مجموعة الاعداد الصحيحة بالنسبة لعلاقة الترتيب المألوفة

$$\cdots - 2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \cdots$$

لا تحوي أيا من العناصر السابقة. . ( أصغر ـ أصغري ـ أكبر ـ أعظمي )
بينما اذا عرّفنا علاقة ترتيب جديدة على مجموعة الاعداد الصحيحة

$$0 < 1 < 2 \cdots - 1 < -2 < -3 \cdots$$

هي مجموعة مرتبة جزئية تحوي الصفر $(0)$ وهو عنصر أصغر و أصغري . ولا يوجد لا أكبر ولا أعظمي .

---

**مثال (2)**

لتكن $A = \{a, b, e, c\}$ مجموعة ما

$$P = \{\{a\}\ ,\quad \{a,b\}\ ,\quad \{a,c\}\}$$

$(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا لأنه :
مع أي مجموعة جزئية مع علاقة الاحتواء هي علاقة ترتيب .
$\{a\}$عنصر أصغر في المجموعة $P$
$\{a,b\}$ليس أصغر لأنه يوجد أصغر منه ولا يساويه في $P$
$\{a,b\}$ليس أصغري في $P$
$\{a,c\}$ليس أصغر ولا أصغري في $P$
$\{a\}$ليس عنصر أكبر في $P$
$\{a,b\}$ليس عنصر أكبر
$\{a,c\}$ليس عنصر أكبر في $P$
لكن $\{a,b\}$ عنصر أعظمي لأن الشرط التالي محقق : $\forall y \in P, b < y \Rightarrow b \neq y$
وأيضا $\{a,c\}$ أعظمي في $P$

---

**مثال :** $P` = \{\{a\}\ ,\ \{b\}\ , \{a,b\}\ ,\ \{a,b,c\}\}$

$(P`, \leq)$مجموعة مرتبة جزئيا
$\{b\}$و $\{a\}$ ليس عنصر أصغر في $P`$
$\{a\}$أصغري و $\{b\}$ أصغري في $P`$
$\{a,b\}$ليس أصغر ولا اصغري في $P`$
$\{a,b\}$ليس أكبر ولا واعظمي في $P`$
$\{a,b,c\}$عنصر أكبر يرتبط مع كل العناصر التي تسبقه وأكبر منهم جميعا في $P`$
$\{a,b,c\}$أيضا أعظمي في $P`$

**تمهيدية:** لتكن $(P, \preceq)$ مجموعة مرتبة جزئيا عندئذ :

- العنصر الأصغر (الأكبر) في حال وجوده وحيد.
- كل عنصر أصغر (أكبر) هوعنصر أصغري ( أعظمي ).

**البرهان :**

١) ليكن $a, b \in P$ ولنفرض ان كل منهما عنصر أصغرفي $P$ عندئذٍ "حسب شرط العنصر الأصغر" فإن:

$$\begin{cases} a \preceq b \\ b \preceq a \end{cases} \Leftarrow a = b$$ (لان $\preceq$ علاقة تخالفية)

٢) ليكن $d \in P$ ولنفرض ان $d$ عنصرأصغروليكن $x \in P$ ولنفرض ان $x \preceq d$

لما كان $d$ عنصر أصغر $\Leftarrow d \preceq x \Leftarrow d = x$

حسب التعريف:

$\forall x \in P \quad ; x \preceq d \Rightarrow x = d(*)$ ومنه نجد ان $d$ عنصر أصغري.

**من طبيعة البشر التفكير بحكمة**

**والتصرف بسخافة..**

**انتهت المحاضرة**

إعداد: راما جوهر – آية اليافي – آية بسيكي

تنسيق: ولاء الأخضر