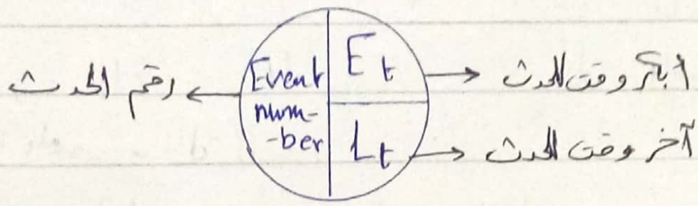
المحاضرة الرابعة

◄ دكتور المادة: خالد خنيفس

◄ عنوان المحاضرة: مثال لطريقة بيرت
+ حل جملة معادلات خطية

نظري ☑
عملي ☐

ذكرنا في المحاضرة السابقة أن العقدة في طريقة بيرت تكتب بالشكل:



- لحساب أبكر وقت:

$$E_t(j+1) = \max\{E_t(j) + t_{ej}\}$$

حيث $E_t(j)$ أبكر وقت للحدث ن

t_{ej} الوقت المحسوب

- لحساب آخر وقت:

$$L_t(i+1) = \min\{E_t(i) - t_{ei}\}$$

- لحساب وقت التعطيل:

$$S_i = \underbrace{L_t(i)}_{\text{آخر وقت}} - \underbrace{E_t(j)}_{\text{أبكر وقت}}$$

ملاحظة: القوانين السابقة هي للفهم فقط (تساعد على حل المسائل)

- نذكر أن: O.T. : وقت التفاؤل.

P.T. : وقت التشاؤم.

M.L.T. : أكثر الأوقات احتمالاً.

تمرين : ترغب إحدى الشركات بإنجاز مشروع لإحدى المؤسسات، نتيجة دراسة المشروع حصلنا على المعلومات التالية :

الأحداث Events	الأنشطة Activity	وقت التفاؤل O.T.	وقت التشاؤم P.T.	الوقت المتوقع M.L.T.	الأوقات المحسوبة Compute time
$1 \to 2$	A	2	4	3	3
$1 \to 3$	B	4	8	6	6
$2 \to 3$	C	3	5	4	4
$3 \to 4$	D	4	6	5	5
$2 \to 4$	E	3	4	4	3.8

((أضفنا هذا العمود بعد الحل))

- لحساب الأوقات المحسوبة (العمود الأخير) من القانون التالي :

$$\boxed{\text{Compute time} = \frac{O.T. + 4\,M.L.T. + P.T.}{6}}$$

- الوقت المحسوب لـ A :

$$t_A = \frac{2 + 4(3) + 4}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

- الوقت المحسوب لـ B :

$$t_B = \frac{4 + 4(6) + 8}{6} = 6$$

- الوقت المحسوب لـ C

$$t_C = \frac{3 + 4(4) + 5}{6} = 4$$

- الوقت المحسوب لـ D :

$$t_D = \frac{4 + 4(5) + 6}{6} = 5$$

- الوقت المحسوب لـ E :

$$t_E = \frac{3 + 4(4) + 4}{6} = 3.8$$

المطلوب: رسم شبكة إنجاز المشروع مبين عليها مايلي:

1. الأوقات المحسوبة في كل نشاط.
2. أبكر وقت لكل حدث.
3. آخر وقت لكل حدث.
4. حساب وقت التعطيل لكل حدث.
5. إيجاد المسار الحرج Critical path.

---

1. حسبنا سابقاً الأوقات المحسوبة لكل حدث وهي:

$t_A = 3$, $t_B = 6$, $t_C = 4$, $t_D = 5$, $t_E = 3.8$

ونضعها على الشبكة.

2. حساب أبكر وقت:

- أبكر وقت لحدث البداية يساوي الصفر دوماً.
- أما بالنسبة لبقية الأحداث (غير حدث البداية) أبكر وقت هو عبارة عن القيمة العظمى لأطوال المسارات التي تسبق هذا الحدث.

3. حساب آخر وقت:

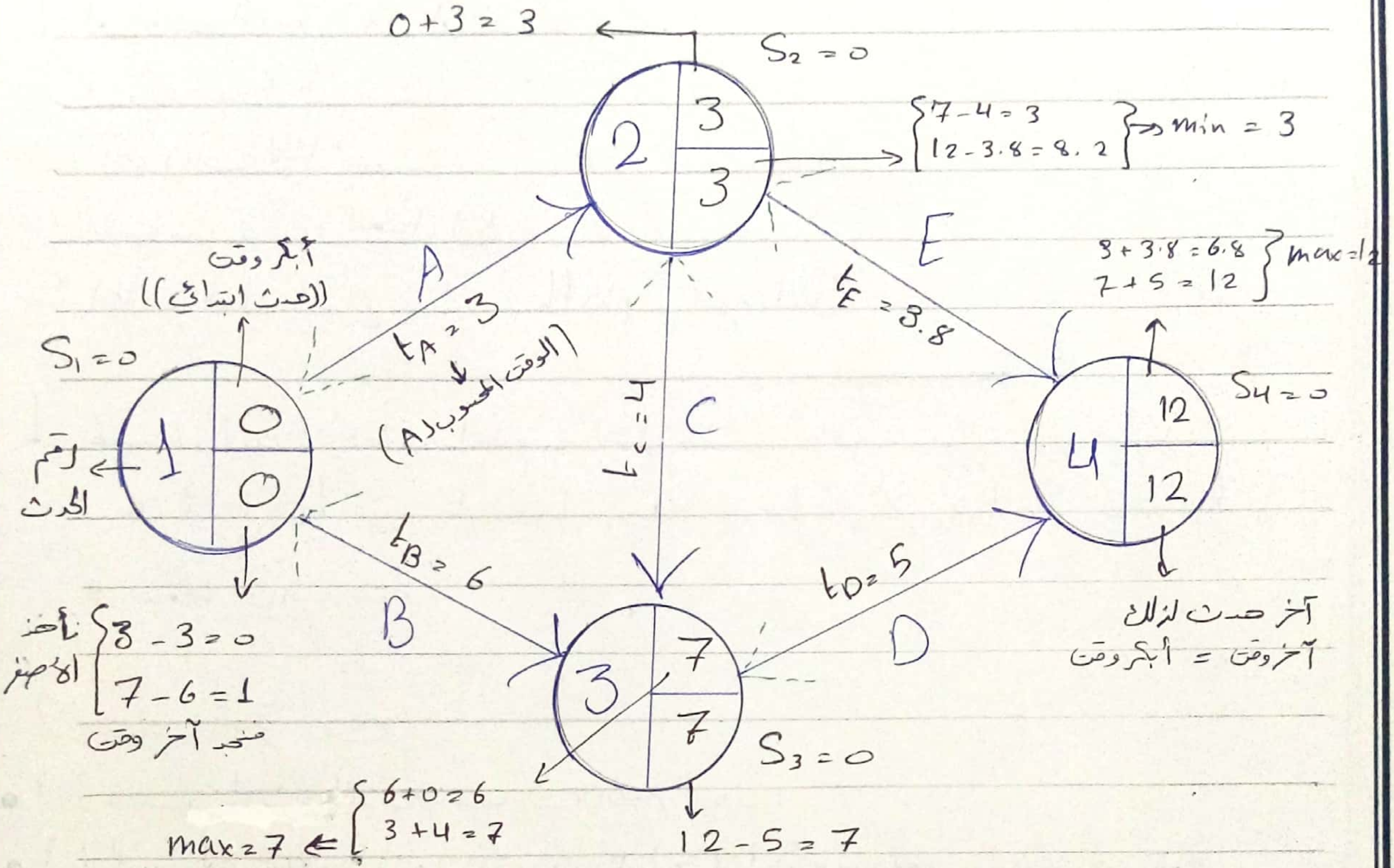
- آخر وقت لحدث النهاية يساوي أبكر وقت له.
- لحساب آخر وقت لبقية الأحداث نعكس اتجاه الشبكة، وفي حال وجود أكثر من مسار نأخذ القيمة الأصغر.

4. حساب وقت التعطيل (بعد رسم الشبكة):

نطرح آخر وقت من أبكر وقت: $S_2 = 3 - 3 = 0$, $S_1 = 0 - 0 = 0$

$S_3 = 7 - 7 = 0$, $S_4 = 12 - 12 = 0$

- نرسم الشجرة ونضع عليها جميع الطلبات.



5- إيجاد المسار الحرج:

المسار الحرج: هو أطول مسار بين عقدة البداية وعقدة النهاية.

- لنضع جميع المسارات الممكنة ونأخذ أطولها:

$1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{3.8} 4 \longrightarrow L_1 = 3+3.8 = 6.8$

$1 \xrightarrow{6} 3 \xrightarrow{5} 4 \longrightarrow L_2 = 6+5 = 11$

$1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{5} 4 \longrightarrow L_3 = 3+4+5 = 12$

(المسار الحرج) $C.P = \max\{L_1, L_2, L_3\} = \max\{6.8, 11, 12\} = 12$

- لإيجاد المسار الحرج دون مشاكل: هو المسار الذي يمر من العقد (الأحداث) التي يكون من أجلها وقت التعطيل يساوي الصفر.

ملاحظة: عادةً في المراجع توضع شبكة المشروع وتوضع عليه الأحداث بحيث يكون ترتيبها وفق ما يلي: $C_n\,(a\,,\,b\,,\,d)$

حيث: a : وقت التفاؤل O.T.

b : وقت التشاؤم P.T.

d : أكثر الأوقات احتمالاً M.L.T.

استخدام نظرية البيان لحل جملة المعادلات الخطية:

- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1$$
$$a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{i1}.x_1 + a_{i2}.x_2 + \cdots + a_{in}.x_n = b_i \qquad \boxed{\text{المعادلة } i}$$
$$\vdots$$
$$a_{k1}.x_1 + a_{k2}.x_2 + \cdots + a_{kn}.x_n = b_k \qquad \boxed{\text{المعادلة } k}$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \cdots + a_{mn}.x_n = b_m$$

لقد تمكنّا من حل المعادلات الخطية بالطرق الجبرية (غاوس ـ جوردان ـ الحذف بالتعويض ـ ...) ولنضيف طريقة بالاستفادة من نظرية البيان لحل هذه الجملة:

- من المعادلة (i) نخرج (x_i) ، حيث المعادلة (i) بالتفصيل:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i} + \cdots + a_{in}.x_n = b_i$$

وبإخراج (x_i):

$$x_i = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n}{a_{ii}}$$

- نعوض عن (x_i) في المعادلة (k) حيث المعادلة (k) مكتوبة بالتفصيل :

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{ki-1}x_{i-1} + a_{ki}x_i + a_{ki+1}x_{i+1} + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

- وبعد تعويض (x_i) :

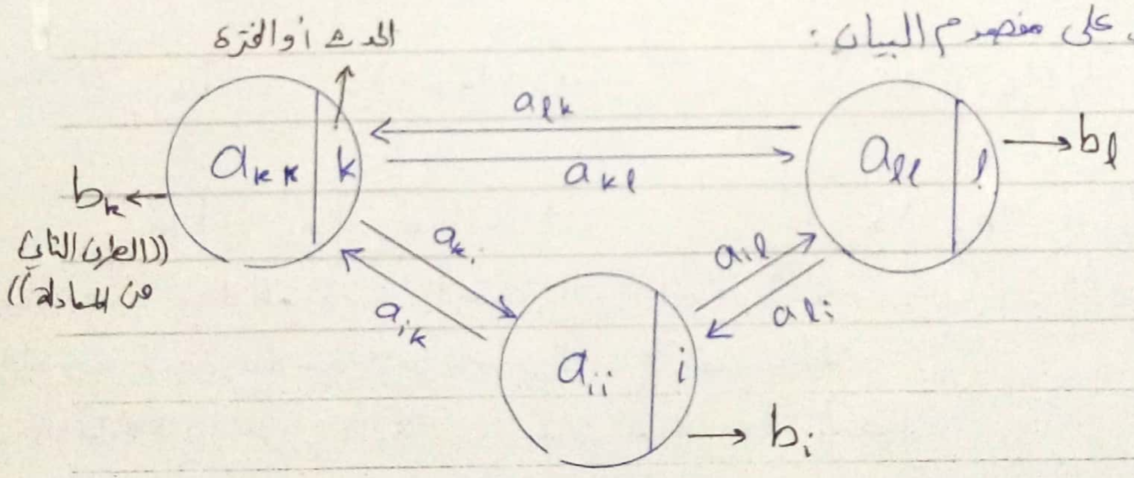
$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{ki-1}x_{i-1} + a_{ki}\left[\frac{b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1}x_{i+1} - \dots - a_{in}x_n}{a_{ii}}\right]$$

$$+ a_{ki+1}x_{i+1} + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

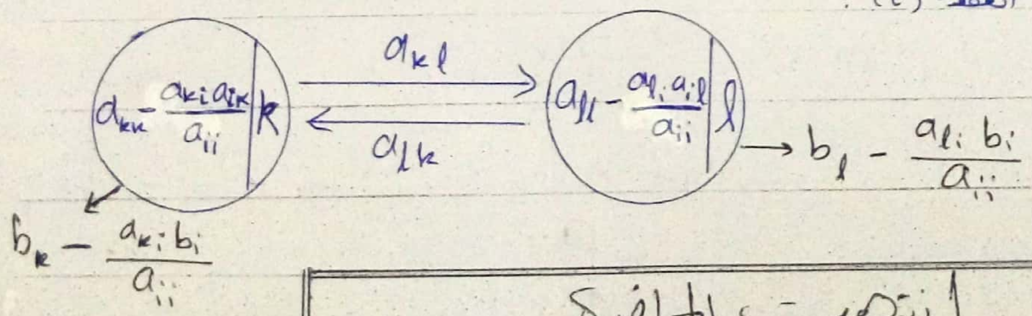
- وبالإصلاح تصبح المعادلة :

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[a_{k1} - \frac{a_{ki}a_{i1}}{a_{ii}}\right]x_1 + \left[a_{k2} - \frac{a_{ki}a_{i2}}{a_{ii}}\right]x_2 + \dots \\ &\dots + \left[a_{ki-1} - \frac{a_{ki}a_{ii-1}}{a_{ii}}\right]x_{i-1} + \dots + \left[a_{kn} - \frac{a_{ki}a_{in}}{a_{ii}}\right]x_n \\ &= b_k - \frac{a_{ki}b_i}{a_{ii}}\end{aligned}}$$

- سنبين ذلك على مفهوم البيان :



- وإذا أردنا إخفاء العقدة (i) :



انتهت المحاضرة