◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الرابعة ◄ عنوان المحاضرة: الشكل القطبي للعدد العقدي

نظري

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-إثبات بعض خواص طويلة العدد العقدي .

٢-الشكل المثلثي (القطبي) لعدد عقدي .

٣- دستوري أولر و دوموافر .

٤-تمارين .

تكلمنا في المحاضرة السابقة عن طويلة عدد عقدي و عرفناها بأنها العدد الحقيقي الغير سالب المعطى بالشكل : $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

و أيضاً تناولنا بعض خواص هذه الطويلة .

والآن سنقوم بإثبات صحة الخاصة : $|z^2| \neq z^2$ ، أما إذا كان : $x \in \mathbb{R}$ فإن : $|x^2| = x^2$

- لنأخذ مثال يوضح أن $|z^2| \neq z^2$:

$$(1+2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$$

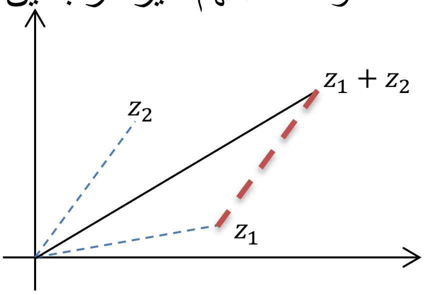
$$|1+2i|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

إذاً واضح أن : $|1+2i|^2 \neq (1+2i)^2$

سؤال : أثبت صحة هذه العلاقة هندسياً : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

لنأخذ : z_1 , z_2 غير مرتبطين خطياً أي غير متوازيين ((ليسا محمولين على حامل واحد))

إن في حالة : z_1 , O, $z_1 + z_2$ ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة لأنهم غير مرتبطين خطياً .



أي أن : z_1 , O, $z_1 + z_2$ رؤوس مثلث

ومن اهم خواص المثلث <<طول اي ضلع في مثلث سيكون أصغر من مجموع طولي الضلعين الباقيين>>

إن :

$|z_1|$ هو بعد z_1 عن O أي طول Oz_1 .

$|z_1 + z_2|$ هو طول الضلع OM .

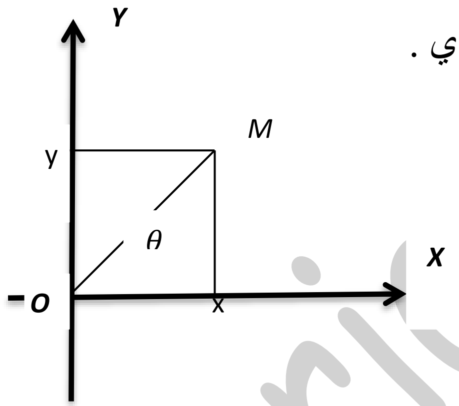
$|z_2|$ هو طول الضلع $M'M$.

وحسب الخاصة : طول اي ضلع في مثلث أصغر من مجموع طولي الضلعين الباقيين .

$$|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$$

فكرة : إن $|z_2 - z_1|$ تمثل هندسيا المسافة بين z_2 , z_1 .

الشكل القطبي للعدد العقدي



لتكن : $M(x, y)$ النقطة الممثلة للعدد : $z = x + iy$ في المستوي العقدي .

ولتكن : (r, θ) الإحداثيات القطبية للنقطة M .

و r هو بعد النقطة عن المبدأ .

$$r = |OM| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

و θ : هي قياس الزاوية بين الاتجاه الموجب ل OX و الشعاع $\overrightarrow{oM}$.

*هذه الزاوية لها عدد غير منته من القياسات ، ونسمي هذه الزاوية بزاوية z

* نرمز لأي قياس من هذه القياسات بـ $\arg z$

*نرمز لهذا القياس إذا انتمى للمجال نصف المفتوح $]-\pi, \pi]$ بـ $\text{Arg } z$

الفرق بين $Arg\ z$ و $\arg z$

هو أن $Arg\ z$ نستخدمها فقط إذا كانت $\theta \in]-\pi, \pi]$

❖ من الواضح أن : $x = r\cos\theta \quad \& \quad y = r\sin\theta$

و بالتالي أصبح يمكننا أن نعبر عن العدد العقدي : $z = x + iy$

بدلالة الإحداثيات القطبية r, θ كما يلي : $\underbrace{\boxed{\begin{aligned} z &= r\cos\theta + i\, r\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}}}_{\text{الشكل القطبي}}$

نسمي الشكل الأخير الذي حصلنا عليه بالشكل المثلثي ((القطبي)) للعدد العقدي z .

ويمكننا أن نرمز له ب $z = [r, \theta]$ اختصاراً .

وبعض المراجع ترمز لِ : $\cos\theta + i\sin\theta$ ب $cis\ \theta$.

- **علاقة أولر :** هي العلاقة من الشكل :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

فيكون : $\boxed{z = re^{i\theta}}$ وهذا الشكل يسمى بالشكل الأسي للعدد العقدي .

ملاحظة : لإيجاد قيمة الزاوية إذا كانت شهيرة فيمكننا أن نوجدها باستخدام الطريقة التالية :

الربع	الحقيقي(x)	التخيلي (y)	الزاوية (θ)
الربع الأول	+	+	$+\theta'$
الربع الثاني	-	+	$\pi - \theta'$
الربع الثالث	-	-	$\pi + \theta'$
الربع الرابع	+	-	$-\theta'$

- أمثلة :

أوجد الشكل المثلثي للعدد العقدي : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

الحل : $r = |z_1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow Arg\, z = \frac{\pi}{3}$$

و بالتالي الشكل المثلثي هو : $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$

*طريقة ثانية : $\tan\frac{y}{x} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$$z_2 = 3$$

$$r = |z_2| = |3| = 3$$

$$\Rightarrow Arg z_2 = 0 \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow z_2 = [3,0]$$

ذلك لأن العدد العقدي هنا قسمه التخيلي معدوم و بالتالي هو يقع على المحور الحقيقي (الزاوية بين شعاعه و المحور الحقيقي معدومة)

$$z_3 = -5$$

$$r = |z_3| = |-5| = 5$$

$$Arg z = \pi \Rightarrow z_3 = [5, \pi]$$

((نستنتج أن القيمة الرئيسية لأي عدد حقيقي سالب هي π))

$$z_4 = 3i$$

$$r=|z_4|=3 \Rightarrow Arg z_4=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow z_4=\left[3,\frac{\pi}{2}\right]$$

((نستنتج أن القيمة الرئيسية لأي عدد عقدي بحت واقع في النصف العلوي من المستوي العقدي هي $\frac{\pi}{2}$))

$$z_5=-\sqrt{3}i$$

$$r=|z_5|=\sqrt{3}$$

$$Arg z_5=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow z_5=\left[\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right]$$

((نستنتج أن القيمة الرئيسية لأي عدد عقدي بحت واقع في النصف السفلي من المستوي العقدي هي $-\frac{\pi}{2}$))

• حاصل ضرب عددين عقديين بالشكل المثلثي :

ليكن : $z_1=[r_1,\theta_1]$ و $z_2=[r_2,\theta_2]$ عددين عقديين

فإن: $z_1 . z_2=[r_1 . r_2 ,\ \theta_1+\theta_2]$

نستنتج انه إذا كان : $z=[r,\theta]$ $\Leftarrow$ $z^n=[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$

ونكتبها بالشكل : $[r(cos\theta+isin\theta)]^n=r^n(\cos(n\theta)+isin(n\theta))$

$$\Rightarrow \boxed{(cos\theta+isin\theta)^n=\cos(n\theta)+isin(n\theta)}$$

وهو دستور دوموافر .

ويمكن أن نستفيد من هذا الدستور بتعيين بعض العلاقات المثلثية .

• **مثال** : أوجد $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$ مستخدماً دستور دوموافر.

الحل :

$$(\text{cis } \theta)^3=(cos\theta+isin\theta)^3$$

$$\text{cis } 3\theta=cos3\theta-isin3\theta$$

$$cos3\theta - isin3\theta = (cos\theta + isin\theta)^3$$

$$=(\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2 isin\theta + 3cos\theta(isin\theta)^2 + (isin\theta)^3$$

$$= cos^3\theta + 3cos^2\theta . isin\theta - 3cos\theta . sin^2\theta - isin^3\theta$$

$$cos3\theta - isin3\theta = cos^3\theta - 3cos\theta . sin^2\theta + i(3cos^2\theta . sin\theta - sin^3\theta)$$

بالمقارنة : $cos3\theta = cos^3\theta - 3cos\theta . sin^2\theta$

ولكن : $sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$

نعوض : $cos3\theta = cos^3\theta - 3cos\theta(1 - cos^2\theta)$

$$cos3\theta = cos^3\theta - 3cos\theta + 3cos^3\theta$$

$$cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$$

- **مثال :**

اكتب بالشكل الجبري العدد العقدي : $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{100}$

هنا لدينا قسمة عددين عقديين لإيجاده نكتب البسط بالشكل المثلثي

والمقام بالشكل المثلثي ،

فحاصل القسمة سيكون عدد طويلة البسط على طويلة المقام و زاويته هي زاوية البسط ناقص زاوية المقام

*لنفرض أن : $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$

$$r_1 = |z_1| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta_1 = \frac{x_1}{r_1} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{y_2}{r_2} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$((\text{ربع رابع})) \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 2\left(\cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3}\right) = \left[\underbrace{2}_{\text{طويلة البسط}}, -\frac{\pi}{3}\right]$$

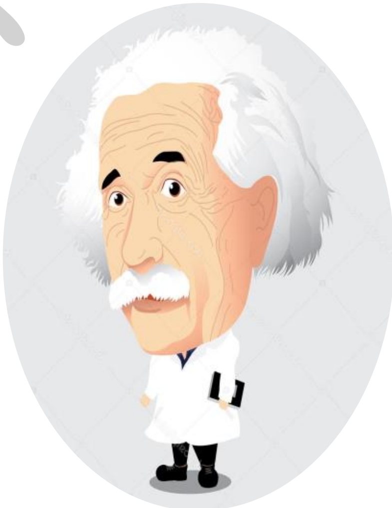
$$z_2 = 1 + i$$

$$r_2 = |z_2| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x_2}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y_2}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4} \qquad ((\text{ربع أول}))$$



$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left[\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{طويلة المقام}}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\left(\frac{\left[2, -\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}\right)^{100} = \left[\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{12}\right]^{100}$$

$$= \left[\sqrt{2}^{100}, -\frac{100 \times 7\pi}{12}\right] = \left[\sqrt{2}^{100}, -\frac{700\pi}{12}\right]$$

$$\mathbf{\frac{700}{12} = \frac{350}{6} = \frac{175}{3} = 58 + \frac{1}{3}}$$

$$= \left[4^{25}, -\left(58 + \frac{1}{3}\right)\pi\right]$$

$$= \left[4^{25}, -\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= 4^{25}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 4^{25}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى