المحاضرة الأولى

◄ دكتور المادة: خالد خنيفس

◄ عنوان المحاضرة: تطبيقات نظرية البيان في النقل .

نظري ☑
عملي ☐

تمرين : لدينا قارب يتسع لشخص وعنصر آخر معه
ونريد الانتقال إلى الطرف الثاني
لكن لا يمكن ترك الذئب مع الأرنب
أو الأرنب مع العشب .

الطرف الأول		الطرف الثاني
M W R G (شخص ذئب أرنب عشب)	قارب	

- سنضع أولاً جدولاً يمثل جميع المجموعات الجزئية من جهة ومتمماتها من جهة أخرى :

$\Omega = MWRG$	$\emptyset$
MWR	G
MRG	W
MWG	R
RWG	M
MR	WG
MW	RG
MG	RW
RW	MG
RG	MW
WG	MR

M	RWG
R	MWG
W	MRG
G	MRW
$\emptyset$	$\Omega = MRWG$

(تتمة الحالات)

ثم نقوم بحذف الحالات الممنوعة حسب معطيات المسألة، وهي الحالات التالية:

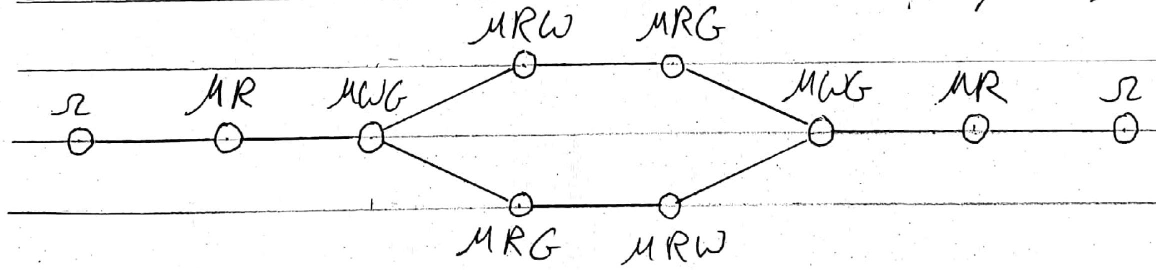
RW — MG / MG — RW / MW — RG / RWG — M

M — RWG / RG — MW فيصبح الجدول بالشكل:

$\Omega = MRWG$	$\varnothing$
MRW	G
MRG	W
MWG	R
MR	WG
WG	MR
R	MWG
W	MRG
G	MWR
$\varnothing$	$\Omega = MRWG$

نريد الآن إيجاد بيان موافق للشكل المجاور. سنفرض مثلاً أن الرجل أخذ معه الأرنب إلى الطرف المجاور أولاً، ثم عاد إلى الطرف الأول فأصبح لديه خياران، إما أن يأخذ الذئب أو العشب إلى الطرف الثاني، ثم يعود إلى الطرف الأول ومعه الأرنب وهكذا ___

فيكون البيان المطلوب:



تطبيقات نظرية البيان في النقل: Transport Problem

طرق النقل تعتمد على تمثيل المسألة بشكل جدول ((يسمى مصفوفة النقل)):

حيث عدد المستهلكين $= m$, عدد الموزعين $= n$, عدد المجاهيل $= m \times n$

و C_{ij} تمثل الكلفة

X_{ij} هي الكمية المطلوب نقلها من المركز A_i إلى B_j ((وهي المجاهيل المطلوب حسابها))

المستهلكون / الموزعون	B_1	B_2	---	B_m	الاحتياطي (الموجودات)
A_1	X_{11} $\boxed{C_{11}}$	X_{12} $\boxed{C_{12}}$	---	X_{1m} $\boxed{C_{1m}}$	a_1
A_2	X_{21} $\boxed{C_{21}}$	X_{22} $\boxed{C_{22}}$	---	X_{2m} $\boxed{C_{2m}}$	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	X_{n1} $\boxed{C_{n1}}$	X_{n2} $\boxed{C_{n2}}$	---	X_{nm} $\boxed{C_{nm}}$	a_n
الطلبية	b_1	b_2	---	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i$ / $\sum_{j=1}^{m} b_j$

- أهداف مسألة النقل:

1. كلفة النقل أقل ما يمكن ، ويتم حساب الكلفة من خلال:

$$Z = x_{11} \cdot c_{11} + \cdots + x_{nm} \cdot c_{nm}$$

2. تلبية رغبات الموزعين. (بيع جميع المنتجات).

3. تلبية رغبات المستهلكين. (أخذ احتياجاتهم من الطلبات)

- ملاحظات: إذا وضعنا $\bar{b} = \sum_{j=1}^{m} b_j$ ، $\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i$:

1. الاحتياطي > الطلبية ⟸ رخص الأسعار $\bar{a} > \bar{b}$
2. الاحتياطي < الطلبية ⟸ زيادة الأسعار (احتكار) $\bar{a} < \bar{b}$
3. الاحتياطي = الطلبية ⟸ توازن في الأسعار $\bar{a} = \bar{b}$

- لتحقيق شروط أهداف المسألة يجب تحقق الشروط التالية :

$\boxed{1}$ بالنسبة للموزعين :

ذكرنا أن التكلفة الكلية تحسب من :

$$Z = x_{11} C_{11} + --- + x_{nm} C_{nm}$$

الموزع الأول : $x_{11} + x_{12} + --- + x_{1m} \leq a_1$

الثاني : $x_{21} + x_{22} + --- + x_{2m} \leq a_2$

$\vdots$

الموزع رقم n : $x_{n1} + x_{n2} + --- + x_{nm} \leq a_n$

n معادلة مستقلة خطياً .

بجمع المعادلات : $x_{11} + x_{12} + --- + x_{nm} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$

n+1 معادلة مرتبطة خطياً

- إذاً أصبح لدينا جملة n+1 معادلة مرتبطة خطياً (لأننا نستطيع الحصول على أي معادلة من المعادلة الأخرى) ، وبحذف معادلة تصبح جملة المعادلات من n معادلة مستقلة خطياً .

$\boxed{2}$ بالنسبة للمستهلكين :

المستهلك الأول : $x_{11} + x_{21} + --- + x_{n1} \leq b_1$

الثاني : $x_{12} + x_{22} + --- + x_{n2} \leq b_2$

$\vdots$

المستهلك رقم n : $x_{1m} + x_{2m} + --- + x_{nm} \leq b_m$

m معادلة مستقلة خطياً .

مجمع المعادلات : $x_{11} + x_{21} + --- + x_{nm} \leq \sum_{j=1}^{m} b_j$

m+1 معادلة مرتبطة خطياً

- أصبح لدينا m+1 معادلة مرتبطة خطياً (لأنه من المعادلة الأخيرة نستطيع الحصول على أي معادلة) ، بحذف إحدى المعادلات يصبح لدينا جملة من m معادلة مستقلة خطياً .

- مما سبق أصبح لدينا m+n معادلة مرتبطة خطياً ، بحذف معادلة منها فيصبح لدينا m+n-1 معادلة مستقلة خطياً ، وبذلك يمكننا حساب قيم m+n-1 مجهول ، والبقية نفرض قيمها أصفاراً .

ملاحظة : حل أي مسألة نقل نحتاج لخطة نقل ابتدائية ، ثم نطوّر هذه الخطة حتى نحصل على الحل المثالي .

- يوجد عدة طرق لحل هذا النوع من المسائل (وضع خطة نقل ابتدائية) حسب المجاهيل:
1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية North - West corner method
2- طريقة القيم الدنيا. minimal value method
3- طريقة فوجل التقريبية Vogel's method

1 طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

نبدأ من الزاوية الشمالية الغربية في الجدول، ونحقق الطلبات بالترتيب:
مثال: ليكن لدينا جدول النقل التالي:

	B_1	B_2	B_3	B_4	الاحتياطي
A_1	x_{11} [1]	x_{12} [3]	x_{13} [4]	x_{14} [5]	150
A_2	x_{21} [6]	x_{22} [2]	x_{23} [3]	x_{24} [4]	100
A_3	x_{31} [3]	x_{32} [4]	x_{33} [5]	x_{34} [2]	75
الطلبات	50	75	150	50	325 / 325

هنا لدينا $n = 3$ موزع، و $m = 4$ مستهلك، و $m \times n = 12$ مجهول
إذاً نستطيع حساب قيم $m + n - 1 = 6$ مجاهيل، أي لدينا 6 مجاهيل نريد أن نحسب قيمها و 6 مجاهيل معدومة.

نجد هنا: $\bar{a} = \bar{b} = 325$ أي أن المسألة مغلقة.

- نبدأ من الخانة x_{11} التي تدل على الكمية المرسلة من المركز A_1 إلى المستهلك الأول B_1 ثم ننظر إلى الاحتياطي (الموجودات) لـ A_1، وهي تبلغ 150، بينما يحتاج المستهلك 50 وبالتالي نضع $x_{11} = 50$، ومنه فإن x_{21}، x_{31} خانات فارغة (لأن الخانة x_{11} أخذت كل حاجة المستهلك فلم يبقَ شيء لـ x_{21} أو x_{31}) ويبقى في الموجودات 100.

- بعد ذلك ننظر إلى الخانة x_{12} التي تدل على الكمية المرسلة من A_1 إلى المستهلك الثاني B_2، نجد أنه بقي في الاحتياطي 100 والمستهلك يحتاج 75، وبالتالي نضع $x_{12} = 75$ ومنه: x_{22} و x_{32} فارغة (لأن الخانة x_{12}

أخذت كل حاجة المستهلك فلم يبق شيء لـ x_{22} أو x_{32}) ويبقى في الموجودات 25 .

ـ ننظر بعد ذلك إلى الخانة x_{13} التي تدل على الكمية المرسلة من المركز A_1 إلى المستهلك الثالث B_3 ، نجد في الاحتياطي أنه بقي 25 ويحتاج المستهلك 150 فنضع $x_{13}=25$ ثم ننزل إلى الخانة x_{23} ونجد أن الموجودات 100 ويحتاج المستهلك 125 ، فنضع $x_{23}=100$ ، ومنه x_{24} فارغة (لأنه لم يبق شيء في الموجودات)

ـ ننزل إلى الخانة x_{33} فنجد أنه يوجد في الاحتياطي 75 ويحتاج المستهلك 150 ، ولكن x_{13} أخذ 25 ، و x_{23} أخذ 100 ، فيبقى لـ x_{33} مقدار 25

$\Leftarrow x_{33}=25$

ـ ثم نذهب إلى اليمين عند الخانة x_{34} ، فنجد أنه تبقى في الموجودات 50 ويحتاج المستهلك مقدار 50 $\Leftarrow x_{34}=50$

يصبح الجدول :

	B_1	B_2	B_3	B_4	الاحتياطي
A_1	50 (1)	75 (3)	25 (4)	— (5)	150
A_2	— (6)	— (2)	100 (3)	— (4)	100
A_3	— (3)	— (4)	25 (5)	50 (2)	75
الطلب	50	75	150	50	325 / 325

هذا الجدول يسمى خطة نقل ابتدائية أو حل ابتدائي ، ويمكن تطويره لتقليل الكلفة .

لإيجاد الكلفة الابتدائية :

$$Z = x_{11}c_{11} + x_{12}c_{12} + \dots + x_{mn}c_{mn}$$

$$= (50)(1) + (75)(3) + 25(4) + (100)(3) + (25)(5) + (50)(2)$$

$$= 900$$

2 طريقة القيم الدنيا :

سنعيد حل المثال السابق بطريقة القيم الدنيا ، للتوضيح :
سنضع إشارة (/) في الخانة التي تحوي أصغر قيمة (كلفة) في عمودها
وإشارة (\) في الخانة التي تحوي أصغر قيمة في سطرها
وإشارة (X) إذا احتوت أصغر قيمة في السطر والعمود.
سنبدأ تلبية الطلبات من الخانات التي تحوي (X) بالترتيب ، فيصبح الجدول كما يلي :

	B_1	B_2	B_3	B_4	الاحتياطي
A_1	× 50 [1]	— [3]	100 [4]	— [5]	150
A_2	— [6]	× 75 [2]	/ 25 [3]	— [4]	100
A_3	— [3]	— [4]	25 [5]	× 50 [2]	75
الطلب	50	75	150	50	325 / 325

وتكون الكلفة :

$$Z = (50)(1) + (100)(4) + (75)(2) + (25)(3) + (25)(5) + (50)(2)$$

$$= 900$$

(ليس من الضروري أن تكون الكلفة ذاتها في الطريقتين)

3 طريقة فوجل :

نقوم بالبحث عن أكبر قيمة للكلفة في كل سطر ونطرح منها أصغر قيمة في نفس السطر ، وكذلك أكبر قيمة من كل عمود نطرح منها أصغر قيمة من العمود نفسه ، ونختار أعظم قيمة ناتجة عن الفروقات .

① الأسطر Rows — الأعمدة Columns

الأسطر Rows	الأعمدة Columns
$\boxed{5 - 1 = 4}$ (السطر الأول)	$6 - 1 = 5$
$6 - 2 = 4$	$4 - 2 = 2$
$5 - 2 = 3$	$5 - 3 = 2$
	$5 - 2 = 3$

② Rows

$5-3=2$

$4-2=2$

$\boxed{5-2=3}$

Columns

$4-2=2$

$5-3=2$

$5-2=3$

③ Rows

$4-3=1$

$3-2=1$

$5-4=1$

Columns

$\boxed{4-2=2}$

$5-3=2$

④ يبقى لدينا من الأسطر 5 , 3 , 4 والفرق في العمود : $5-3=2$

- شرح كيفية الحصول على الجدول (يكفي كفهم) :

في الحالة ① نجد أن أكبر قيمة من الفروقات هي 4 وقد نتجت عن السّطر الأول ، والخانة صاحبة أقل كلفة في هذا السطر هي x_{11} ، نضع فيها أكبر قدر ممكن فنجد أنها تستوعب مقدار 50 (حاجة المستهلك) ، وبالتالي بما أنه تم الانتهاء من حاجة المستهلك لا نختار أي خانة من العمود الأول وننتقل إلى الحالة ② :

نجد أن أعظم قيمة هي 3 نتجت عن السّطر الثّالث ، والخانة صاحبة أقل كلفة في هذا السطر هي x_{34} فنضع فيها أكبر قدر ممكن تستوعبه وهو 50 (حاجة المستهلك) ، وبالتالي تمّ الانتهاء من حاجة المستهلك فلا نختار أي خانة من العمود الرابع وننتقل الحالة ③ :

نجد أنّ أعظم قيمة 2 نتجت عن العمود الثاني ، والخانة صاحبة أقل كلفة في هذا العمود هي x_{22} فنضع فيها أكبر قدر تستوعبه 75 ، وبالتالي تم الانتهاء من حاجة المستهلك فننتقل إلى الحالة ④ : بقي لدينا العمود الثالث :

في الخانة x_{13} نضع ما تبقى من الموجودات أي 100 (لأنّ x_{11} أخذت 50)

في الخانة x_{23} نضع ما تبقى من الموجودات أي 25 (لأنّ x_{22} أخذت 75)

في الخانة x_{33} نضع ما تبقى من الموجودات أي 25 (لأنّ x_{34} أخذت 50)

فيصبح الجدول كما يلي:

	B_1	B_2	B_3	B_4	الاحتياطي
A_1	50 [1]	— [3]	100 [4]	— [5]	150
A_2	— [6]	75 [2]	25 [3]	— [4]	100
A_3	— [3]	— [4]	25 [5]	50 [2]	75
الكمية	50	75	150	50	325 / 325

وتكون التكلفة: $Z = (50)(1) + (100)(4) + (75)(2) + (25)(3) + (25)(5) + (50)(2) = 900$

– لدينا الشرطان التاليان:

في الخلايا المشغولة:	$U_i + V_j = C_{ij}$
في الخلايا الفارغة:	$U_i + V_j \leq C_{ij}$

حيث U_i تسمية للأسطر و V_j للأعمدة.

يوجد لدينا في هذا المثال 7 مجاهيل وهي: $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, V_4$

ونستطيع حساب قيم 6 مجاهيل $((m+n-1))$ لذلك لدينا مجهول اختياري، وليكن U_1 نعطيه قيمة الصفر $(U_1 = 0)$، وبالاعتماد على شرط الخلايا المشغولة:

$U_1 + V_1 = C_{11} \Rightarrow 0 + V_1 = 1 \Rightarrow \boxed{V_1 = 1}$

كما أننا نستطيع إيجاد V_3 بنفس الطريقة:

$U_1 + V_3 = C_{13} \Rightarrow 0 + V_3 = 4 \Rightarrow \boxed{V_3 = 4}$

ولنوجد U_2 من V_3:

$U_2 + V_3 = C_{23} \Rightarrow U_2 + 4 = 3 \Rightarrow \boxed{U_2 = -1}$

ونوجد V_2 اعتماداً على U_2:

$U_2 + V_2 = C_{22} \Rightarrow -1 + V_2 = 2 \Rightarrow \boxed{V_2 = 3}$

U_3 من V_3:

$U_3 + V_3 = C_{33} \Rightarrow U_3 + 4 = 5$

$\Rightarrow \boxed{U_3 = 1}$

وأخيراً V_4 من U_3 : $U_3 + V_4 = C_{34} \Rightarrow 1 + V_4 = 2 \Rightarrow \boxed{V_4 = 1}$

فيصبح الجدول :

		$V_1 = 1$	$V_2 = 3$	$V_3 = 4$	$V_4 = 1$	
		B_1	B_2	B_3	B_4	الاحتياطي
$U_1 = 0$	A_1	50 [1]	— [3]	100 [4]	— [5]	150
$U_2 = -1$	A_2	— [6]	75 [2]	25 [3]	— [4]	100
$U_3 = 1$	A_3	— [3]	— [4]	25 [5]	50 [2]	75
	الطلبات	50	75	150	50	325 / 325

وضح حيث أن التوزيع مثالي لأن شرط الخلايا الفارغة $U_i + V_j \leq C_{ij}$ محقق في جميع الخانات :

$U_1 + V_2 \leq C_{12} \Rightarrow 0 + 3 \leq 3$ ✓

$U_1 + V_4 \leq C_{14} \Rightarrow 0 + 1 \leq 5$ ✓

$U_2 + V_1 \leq C_{21} \Rightarrow -1 + 1 \leq 6$ ✓

$U_2 + V_4 \leq C_{24} \Rightarrow -1 + 1 \leq 4$ ✓

$U_3 + V_1 \leq C_{31} \Rightarrow 1 + 1 \leq 3$ ✓

$U_3 + V_2 \leq C_{32} \Rightarrow 1 + 3 \leq 4$ ✓

انتهت المحاضرة