المحاضرة الثالثة

◄ دكتورة المادة: نور مازيت

◄ عنوان المحاضرة: الحدوديات الدورانية

نظري ☑ عملي ☐

٤/١٠/٢٠١٨م

المحتوى العلمي

1- تذكرة لمعلومات سابقة
2- مبرهنات عن الحدوديات الدورانية
3- مقدمة عن الحقول.

تذكرة

$\boxed{1}$ إن المعادلة $x^n - 1 = 0$ تقبل n جذراً عقدياً حيث $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ، تدعى n جذور هذه المعادلة بجذور الواحد من المرتبة n لأن لو فرضنا α جذر لهذه المعادلة عندها $\alpha^n = 1$

* لإيجاد هذه الجذور نفرض $x = re^{i\theta} = r\,Arg(\theta)$ والآن نعوض بالمعادلة فنجد $(re^{i\theta})^n - 1 = 0$

$$\Rightarrow r^n e^{in\theta} = 1 \Rightarrow r^n e^{in\theta} = 1\, e^{i0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 + 2\pi k \quad ; k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{1} = 1 \\ \theta = \frac{2\pi k}{n} \quad ; k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

وبالتالي مجموعة جذور المعادلة هي

$$\{1e^{i0}, 1e^{i\frac{2\pi}{n}}, 1e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ldots, 1e^{\frac{2\pi(n-1)}{n}i}\}$$

* نرمز لـ $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ بـ f_n وهو جذر أولي لـ 1 من المرتبة n هو جذر للواحد من المرتبة n لأن $(f_n)^n = 1$

وهو جذر أولي لأن: $(\xi_n)^1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $(\xi_n)^2 = e^{i\frac{4\pi}{n}}$

وهكذا حتى $(\xi_n)^{n-1} = e^{\frac{2\pi(n-1)}{n}i}$, $(\xi_n)^n = 1$

* الجذور الأولية ليست وحيدة.

ملاحظة: • $x^n - a = 0 \Leftarrow x^n = a \Leftarrow$

$(re^{i\theta})^n = a = r_1 e^{i\theta_1}$ ثم نتابع كما سبق

مثلاً: $x^3 - 2 = 0 \Leftarrow x^3 = 2 \Leftarrow (re^{i\theta})^3 = 2e^{i0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ \theta = \frac{2\pi k}{3} \quad ; k = 0,1,2 \end{cases}$$

ومنه مجموعة الحلول هي:

$$\left\{ \sqrt[3]{2}\, e^{i0} , \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}} , \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$$

إن هذه الحلول تقع على محيط دائرة نصف قطرها $\sqrt[3]{2}$.

• $x^3 - 1 = 0 \Leftarrow x^3 = 1 \Leftarrow (re^{i\theta})^3 = 1e^{i0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2\pi k}{3} \quad ; k = 0,1,2 \end{cases}$$

ومنه مجموعة الحلول هي:

$$\left\{ 1e^{i0} , 1e^{\frac{2\pi}{3}i} , 1e^{\frac{4\pi}{3}i} \right\}$$

إن هذه الحلول تقع على محيط دائرة نصف قطرها واحد.

• $x^3 + 2 = 0 \Leftarrow x^3 = -2 \Leftarrow (re^{i\theta})^3 = |-2|\, e^{i\pi}$

$\Leftarrow (re^{i\theta})^3 = 2e^{i\pi}$

حيث نعلم أن زاوية العدد السالب هي π.

$\boxed{2}$ إن جذور الواحد من المرتبة 3 هي

$$\left\{ 1 , e^{i\frac{2\pi}{3}} , e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$$

نرمز لـ $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ بـ j فيكون $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ هي j^2

$\boxed{3}$ ليكن p عدداً أولياً عندها

$$\frac{x^p-1}{x-1} \overset{(*)}{=} x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+x+1 \in \mathbb{Z}[x]$$

فمثلاً: $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$

تنويه: إن المساواة $(*)$ محققة وإن لم يكن p عدداً أولياً.

وإن $x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+x+1 \in \mathbb{Z}[x]$

غير مختزلة على $\mathbb{Q}$

p عدد أولي

مثال: نبرهن أن $f(x)=x^2+x+1 \in \mathbb{Z}[x]$

غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

<< طريقة أولى >> في البداية نلاحظ أنه لا يمكن تطبيق مبرهنة ايزنشتاين لأن الحد الثابت 1 أي لا يمكن إيجاد العدد الأولي.

نلاحظ أن أجل العدد الأولي $p=3$ وحسب التذكرة رقم $\boxed{3}$

فإن f غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

<< طريقة ثانية >> إن $f(x)=x^2+x+1 \in \mathbb{Z}[x]$

من الدرجة الثانية و

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x-j)(x-j^2)}{(x-1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-j)(x-j^2)$$

لكن j^2 زوج أعداد عقدية غير حقيقية، إذاً $f(x)$ مدرية من الدرجة 2 ولا تقبل أي جذر في $\mathbb{Q}$، إذاً $f(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

<< طريقة ثالثة >>

$f(x)$ مدرية من الدرجة 2 يكفي لمعرفة أنها غير مختزلة أم لا دراسة هل الجذور تنتمي لـ $\mathbb{Q}$ أم لا.

$$x^2+x+1=0$$

نحل هذه المعادلة عن طريق Δ فنجد

$$\Delta = -3$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3}\, i$$

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

إذن $x_1 , x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

إذن $f(x)$ لا تقبل أي جذر في $\mathbb{Q}$ إذاً $f(x)$ غير خزولة على $\mathbb{Q}$

معيار الأخذ بالقياس «للاطلاع فقط»

مبرهنة) لتكن $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$، إذا وجد عدد أولي p حيث

نأخذ فقط الأمثال بـ mod-p

$$\bar{f}(x) = f(x) \bmod\text{-}p \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}[x]$$

لها نفس درجة $f(x)$ عندها:

$\bar{f}(x)$ غير خزولة على $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ $\Leftarrow$ $f(x)$ غير خزولة على $\mathbb{Q}$

مثال:

$$f(x) = x^3 - 4x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

لنأخذ $p = 3$ ومنه $\bar{f}(x) = x^3 + 2x + 1 \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}[x]$

إذن $\bar{f}$ غير خزولة على $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ لأنها من الدرجة 3 ولا تقبل أي جذور في $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ حيث

$$\{ \bar{f}(0) \neq 0 , \bar{f}(1) \neq 0 , \bar{f}(2) \neq 0 \}$$

إذاً f غير خزولة على $\mathbb{Q}$.

* نلاحظ عندما يكون $p = 2$ فإن $\bar{f}(x)$ ستكون خزولة على $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ وعندئذٍ لا نستطيع الحكم على $f(x)$ إذا كانت خزولة أم لا لذلك يجب توخي الحذر عند اختيار العدد الأولي.

ملاحظة: A هي حلقة تبديلية رئيسية أي:

1- تبديلية 2- منطقة تكاملية

3- كل مثالي I في A هو مثالي رئيسي له الشكل:

$\exists a \in A : I = \langle a \rangle = (a) = a.A = \{a.\varphi : \varphi \in A\}$

مثال: $\mathbb{Z}$ هي حلقة تبديلية رئيسية كون:

$I = m\mathbb{Z} = (m) \; : m \in \mathbb{N}$

مبرهنة: $K[x]$ حلقة رئيسية إذا كان K حقل.

مقدمة عن الحقول:

تعريف الحقل: لتكن $F \neq \emptyset$ مزودة بقانوني تشكيل داخليين الأول $(+)$ والثاني $(\cdot)$ نقول عن الثلاثية $(F, +, \cdot)$ أنها حقل إذا حقق:

1) $(F, +)$ زمرة تبديلية

2) $(F^*, \cdot)$ زمرة تبديلية

3) $(\cdot)$ توزيعي على $(+)$

ملاحظات:

$\boxed{1}$ $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ حقل $\Leftrightarrow$ n عدد أولي

$\boxed{2}$ التشاكل الحلقي هو تطبيق $f : R_1 \to R_2$ حيث R_1, R_2 حلقات ويحقق

$\forall x, y \in R_1$

• $f(x+y) = f(x) + f(y)$

- $f(x.y) = f(x).f(y)$
- $f(1) = 1$

3] لدينا $f: A \to B$ تشاكل حلقي، إذا فرضنا أن A حقل عندئذٍ f متباين.

{تذكرة: إذا كان F حقلاً فإن F يحوي مثاليين فقط هما $\{0\}$ و F}

البرهان: ((برهان رقم 3))

إن $\ker f$ مثالي في A ولكن A حقل عندئذٍ

إما $\ker f = 0 \Leftarrow f$ متباين

أو $\ker f = A$ وهذا مرفوض كون $f(1) = 0$ ونعلم من شروط التشاكل أن $f(1) = 1$

ونعلم في الحقل أن $1_F \neq 0_F$.

وبذلك تم المطلوب.

انتهت المحاضرة

"خيفة" هي .. سرقة الأيام

إعداد: شريف الحايك البوشي