الفضاء نصف المتري: لا يختلف نصف المترك عن المترك إلا في الشرط الذي ينص على أن $\forall x,y \in X : d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

ففي نصف المترك يصبح الشرط كما يلي:

$$\forall x,y \in X : x=y \Rightarrow d(x,y)=0$$

«أي في نصف المترك انعدام المسافة لا يقتضي تساوي العنصرين»

تمرين:

ليكن (X,d) فضاء نصف متري ولنعرف علاقة ثنائية على X

كما يلي: $\forall x,y \in X,\quad x\sim y \Leftrightarrow d(x,y)=0$

إن صف التكافؤ $x\in X$ هو $[x]=\{a\in X : x\sim a\}$

ومجموعة هذه الصفوف تدعى مجموعة الخارج $X/\sim$

«حيث يبرهن أن $\sim$ علاقة تكافؤ بسهولة»

نعرف الآن $D : X/\sim \times X/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$

$$D([x],[y]) = d(x,y)$$

أثبت أن D مسافة على $X/\sim$

الحل:

كوننا نتعامل مع مجموعات «الصفوف التكافؤ»

لابد قبل الشروع بالحل أن نثبت أن D معرف جيداً وذلك كما يلي:

ليكن $x_1,x_2 \in [x]$ و $y_1,y_2 \in [y]$

ولنثبت أن $d(x_1,y_1) = d(x_2,y_2)$

$\boxed{1}$ $d(x_1,y_1) \leq \underbrace{d(x_1,x_2)}_{=0} + d(x_2,y_2) + \underbrace{d(y_2,y_1)}_{=0}$

$\boxed{2}$ $d(x_2,y_2) \leq \underbrace{d(x_2,x_1)}_{=0} + d(x_1,y_1) + \underbrace{d(y_1,y_2)}_{=0}$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ $\Leftarrow$ $d(x_1,y_1) = d(x_2,y_2)$

معرفة جيداً.

الآن نتحقق من شروط المسافة :

$\forall [x],[y],[z] \in X/\sim$

1) $D([x],[y]) = d(x,y) \geq 0$

2) $D([x],[y]) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \sim y$

$\Leftrightarrow y \in [x] \Leftrightarrow [y] = [x]$

3) $D([x],[y]) = d(x,y) = d(y,x) = D([y],[x])$

4) $D([x],[y]) = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$= D([x],[z]) + d([z],[y])$

وهو المطلوب ..

- قد يرد سؤالين متشابهين يجب أن نميز بينهما :

$\boxed{1}$ هل الصف $\mathbb{B}$ يصلح أن يكون قاعدة لتبولوجيا τ

$\boxed{2}$ هل الصف $\mathbb{B}$ قاعدة لتبولوجيا τ

إليكم الإجابات:

$\boxed{1}$ ليكن $X \neq \phi$ و $\phi \neq \mathbb{B} \subseteq P(X)$ ، نقول أن $\mathbb{B}$ يصلح أن تكون قاعدة لتبولوجيا إذا تحقق ما يلي :

- $\mathbb{B}$ مغلقة للتقاطع
- $X = \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B$ ((الشاملة تكتب على شكل اجتماع مجموعات من $\mathbb{B}$))

$\boxed{2}$ لتكن (X,τ) فضاء تبولوجي و $\phi \neq \mathbb{B} \subseteq P(X)$ ، إن $\mathbb{B}$ قاعدة لتبولوجيا τ إذا تحقق ما يلي :

- $\mathbb{B} \subseteq \tau$
- $\forall \theta \in \tau, \exists \{B_i\} \subseteq \tau \quad \theta = \bigcup B_i$

وندعو عندئذٍ عناصر $\mathbb{B}$ مفتوحات أساسية.

وكل تبولوجيا هي قاعدة لنفسها

الشبكات :

تعريف (1) : لتكن A مجموعة غير خالية و $\leqslant$ علاقة ترتيب جزئي على A نقول عن المجموعة المرتبة جزئياً إنها موجهة إذا تحقق الشرط :

$$\forall \alpha , \beta \in A \; ; \; \exists \gamma \in A \; ; \quad \alpha \leqslant \gamma \quad , \beta \leqslant \gamma$$

وينتج من هذا التعريف أنه إذا كان A مرتبة كلياً فهي موجهة ذلك لأن قولنا إن A مرتبة كلياً فهذا يعني أن كل عنصرين منها متقارنين

ليكن $\alpha , \beta \in A$ بحيث $\alpha \leqslant \beta$ عندئذٍ :

$$\exists \; \gamma = \beta \quad : \alpha \leqslant \gamma \; , \; \beta \leqslant \gamma$$

$\Leftarrow$ كل مرتبة كلياً هي موجهة .

بكلمات أخرى

> تكون المجموعة المرتبة جزئياً موجهة إذا كان لأجل أي عنصرين منها يوجد عنصر مناسب أكبر من كليهما ((وفق علاقة الترتيب المعرفة))

مثال : لتكن $X \neq \phi$ و $P(X)$ مجموعة أجزاء X ولنعرف على X علاقة ترتيب ((قد تكون غريبة على القارئ)) :

إذا كان $U , V \in P(X)$ فإن $U \leqslant V$ إذا، $V \subseteq U$

ومن السهل التحقق أن $\leqslant$ ترتيباً على $P(X)$ ولنبين أن $(P(X), \leqslant)$ موجهة :

$$\forall U , V \in P(X) , \; U \cap V \subseteq U \;\wedge\; U \cap V \subseteq V$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$U \leqslant U \cap V \qquad V \leqslant U \cap V$$

ويتم المطلوب ...

تعريف (2): لتكن X مجموعة ما، ولتكن $(A,\leqslant)$ مجموعة موجهة

$$S:(A,\leqslant)\longrightarrow X$$
$$\alpha\longmapsto S(\alpha)=S_\alpha$$

ندعو S شبكة (net) أو ((متتالية معممة - متتالية مورسميث))
في X ونرمز لها $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ أو $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$

- كنا سابقاً وفي مقررات كثيرة قد عرفنا المتتاليه بالشكل :

$$x:\mathbb{N}\longrightarrow X$$
$$n\longmapsto x(n)=x_n$$

فهي تطبيق منطلقه $\mathbb{N}$ ومستقره المجموعة X ((غالباً ما كانت $\mathbb{R}$))
فإذا لاحظنا أن $(\mathbb{N},\leqslant)$ مجموعة موجهة ((لأنها مرتبة كلياً))
نجد أنها شبكة.
بالتالي إن مفهوم الشبكة ماهو إلا تعميم لمفهوم المتتالية
ذلك بأن وضعنا مجموعة الأدلة ((المنطلق)) أي مجموعة موجهة
بدلاً من أن نكتفي بـ $\mathbb{N}$.

تقارب الشبكات:

تعريف (1): ليكن (X,τ) فضاءاً تبولوجياً و $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ شبكة في X
وليكن $x\in X$، نقول أن الشبكة $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ تتقارب من x إذا وجد لكل جوار U للنقطة x عنصر $\alpha_0\in A$ بحيث:

$\forall\alpha:\alpha_0\leqslant\alpha$ وذلك $S_\alpha\in U$

وتسمى x عندئذٍ نهاية الشبكة المذكورة فإننا $S_\alpha\longrightarrow x$
أو $\lim(S_\alpha)=x$

♡ مبرهنات ♡

[1] ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي و $Y\subseteq X$ و $x\in X$ عندئذٍ:
$x\in\overline{Y}\iff$ يوجد شبكة $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ كل عناصرها من Y ومتقاربة من x

2 (X,τ) فضاء تبولوجي
(X,τ) هو فضاء هاوسدورف T_2 $\Leftrightarrow$ كل شبكة فيه لها نهاية واحدة على الأكثر
$\Downarrow$
سنأتي على ذكره لاحقاً

3 (X,τ) ، (Y,τ') فضاءان تبولوجيان
$f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau')$
f مستمر عند x_0 $\Leftrightarrow$ كل شبكة $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ من عناصر المنطلق متقاربة من x_0 فإن $\{f(S_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ متقاربة من $f(x_0)$

- الآن سنختم محاضرتنا بكلمات عن الجوارات إذ أنها تلزمنا في كثير من دراستنا القادمة

• **تعريف الجوار**: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي و $p\in X$ نقول عن $V\subseteq X$ إنها جوار لـ p إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\exists\, \theta\in\tau \; : \; p\in\theta\subseteq V$$

نقول عن V إنها جوار مفتوح إذا كان $V\in\tau$ «$V=\theta$»
ونرمز لمجموعة كل جوارات النقطة p بالرمز $\mathcal{V}_p$

خواص $\mathcal{V}_p$:

1 إن $\mathcal{V}_p\neq\phi$ ذلك لأن $p\in X$ و X مفتوحة
$\Leftarrow$ X جواراً لـ p أي أن $X\in\mathcal{V}_p$ بالتالي $\mathcal{V}_p\neq\phi$

2 $\forall V_1,V_2\in\mathcal{V}_p \; ; \; V_1\cap V_2\in\mathcal{V}_p \, , \, V_1\cup V_2\in\mathcal{V}_p$
أي أن تقاطع أو اتحاد جوارين لـ p هو جوار لـ p

3 $\forall V\in\mathcal{V}_p \; ; \; V\neq\phi$ لأن $p\in V$
أي جوار لـ p غير خالي لأنه سيحوي p

4 $V\in\mathcal{V}_p$ ، $U\supseteq V$
$$\Leftarrow \quad U\in\mathcal{V}_p$$

مبرهنة $\boxed{1}$:

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي عندئذٍ :

$A \in \tau \iff A$ جوار لكل نقطة من نقاطها

البرهان :

$\Leftarrow$ ليكن $A \in \tau$ ولتكن $x \in A$ عندئذٍ

$\exists A \in \tau : x \in A \subseteq A \Rightarrow A$ جواراً لـ x

$\Rightarrow$ لتكن $A \subseteq X$ وجواراً لكل نقطة من نقاطها أي :

$$\forall x \in A ; \exists \theta_x \in \tau : x \in \theta_x \subseteq A$$

$$\iff \{x\} \subseteq \theta_x \subseteq A$$

$$\iff \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} \theta_x \subseteq \bigcup_{x \in A} A$$

$$\Downarrow$$

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} \theta_x \subseteq A$$

$$A = \bigcup_{x \in A} \theta_x$$

A كتبت على شكل اجتماع لمفتوحات $\Leftarrow$ مفتوحة $\Leftarrow A \in \tau$

END

إعداد

رشا رويص نزار تيناوي