23-10-2018

نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄المحاضرة: العاشرة ◄ عنوان المحاضرة: متسلسلات التوابع

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتعاريف أخرى لتقارب متسلسلة التوابع.

٢ـخواص التقارب المنتظم لمتسلسلة التوابع (مبرهنات).

تعريف :

نقول عن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على I أنها متقاربة نقطياً من تابع المجموع $S(x)$ إذا كانت المتسلسلة متقاربة كمتسلسلة عددية من أجل كل نقطة x من I .

مثال:

بين فيمَ إذا كانت المتسلسلة متقاربة نقطياً على المجال $I = [0,1]$:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \cdots - \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} - \cdots$$

الحل:

نأخذ متتالية المجاميع الجزئية :

$$S_n(x) = \frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+2)}\right) - \left(\frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x+3)}\right) - \cdots \left(\frac{1}{(x+n-1)} - \frac{1}{(x+n)}\right)$$

$$S_n(x) = \frac{1}{(x+n)} \quad ; \quad \forall x \in [0,1]$$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$$

$s(x) = 0$ متتالية المجاميع الجزئية متقاربة نقطياً على I

لنثبت أنها متقاربة بانتظام :

ليكن $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0(\varepsilon) \neq 0$ $N_0(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$

بحيث يتحقق : $|s_n(x) - s(x)| = \left|\frac{1}{(x+n)} - 0\right|$

$$\frac{1}{(x+n)} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon \quad ; \ \forall x \in I$$

إذاً متتالية المجاميع الجزئية متقاربة بانتظام على I أي المتسلسلة متقاربة بانتظام على I .

ملاحظة:

لا يحدد الدكتور طريقة معينة في الحل، يكون الحل اختياري بالطريقة التي تناسب الطالب، إما طريقة sup أو حسب التعريف .

تعريف:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع على I نفرض أن المتسلسلة متقاربة نقطياً من تابع المجموع $S(x)$ على I

نعرف $r_n(x)$ الباقي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بالشكل :

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

حيث المجموع الجزئي النوني $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

وبالتالي : $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_k(x)}_{s(x)} = S_n(x) + r_n(x)$$

$$r_n(x) = s(x) - S_n(x)$$

◄**تعريف اخر:** تكون متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يكون $n \geq N_0(\varepsilon)$ يحقق : $x \in I$: $|r_n(x)| < \varepsilon$

خواص التقارب المنتظم لمتسلسلات التوابع

مبرهنة ١: الشرط اللازم والكافي لتقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام على I ومجموعها $S(x)$ هو أن يكون الحد العام للمتسلسلة يسعى إلى التابع الصفري مهما كانت $x \in I$

البرهان :

بما أن المتسلسلة متقاربة بانتظام فإن متتالية المجاميع الجزئية متقاربة بانتظام على I .

حسب التعريف يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad : \quad m \geq n \geq N_0$$

نفرض : $n > N_0 + 1 \Leftarrow n > n - 1 \geq N_0$

$|f_n(x)| = |s_n(x) - s_{n-1}(x)| < \varepsilon$ لأجل $x \in I$

وجدنا لكل $\varepsilon > 0$ عدد $N_0 \neq 0$ بحيث يتحقق $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ و $n \geq N_0$ أي أن $lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ وبالتالي $f_n(x)$ يسعى للتابع الصفري بانتظام على I

<u>نتيجة :</u>

إذا كان الحد العام لمتسلسلة $\sum f_n(x)$ متقاربة بانتظام من الصفر على I فإن التقارب النقطي لمتسلسلة ليس بالضرورة أن يكون التقارب منتظم على I .

مثال :

لتكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)$ المعرفة على $I =]-1,1[$

$$s_n(x) = x - x^{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n(x) = x$$

متتالية المجاميع الجزئية متقاربة نقطيا من $S(x) = x$ على I

لنثبت أن الحد العام يسعى الى الصفر :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n(1-x) = 0 = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in I}\,|f_n(x)-f(x)|$$
$$=\lim_{n\to\infty} sup_{x\in I}\,|x^n(1-x)|$$

$x \in]-1,1[$ نأخذ $x=\frac{n}{n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=0$$

وجدنا أن الحد العام يسعى إلى التابع الصفري بانتظام على $]-1,1[$.

ندرس التقارب المنتظم لمتتالية المجاميع الجزئية على I :

ليكن : $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $n \geq N_0$:

$$|s_n(x)-s(x)|=|x-x^{n+1}-x|=|x^{n+1}|$$
$$|s_n(x)-s(x)|=|x|^{n+1}<\varepsilon$$
$$(n+1)\,ln|x|<ln\,\varepsilon$$
$$(n+1)>\frac{ln\,\varepsilon}{ln|x|}$$

نأخذ $n>\frac{ln\,\varepsilon}{ln|x|}-1$

بما أن N_0 تابع ل ε و x ولا يمكن اختصارهما بالتالي التقارب نقطي على I .

مبرهنة 2 : الشرط اللازم والكافي لتقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام على I هو أن يتحقق الشرط التالي : يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots\cdots+f_m(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right|<\varepsilon$$

لأجل : $N_0 \leq n \leq m$ ولكل $x \in I$

البرهان :

لتكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I يكافئ قولنا أن متتالية المجاميع الجزئية $\{s_n(x)\}$

متقاربة بانتظام على I حيث $s_n(x)=\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)$ أي يوجد لكل $\varepsilon>0$ عدد طبيعي $N_0\neq 0$ بحيث:

$$x\in I \quad : \quad m\geq n\geq N_0 \text{ و } \quad |s_m(x)-s_n(x)|<\varepsilon$$

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots\cdots+f_m(x)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)<\varepsilon$$

مثال :

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,(1-x^2)$ المعرفة على $I=[-p,p]$ و $0<p<1$

حسب المبرهنة (٢) يوجد لكل $\varepsilon>0$ عدد $N_0\neq 0$ ومن أجل $m\geq n\geq N_0$ فإن

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n}^{m} x^k(1-x^2)\right|$$

$$=|x^n(1-x^2)+x^{n+1}(1-x^2)+x^{n+2}(1-x^2)+\cdots+x^{m-1}(1-x^2)+x^m(1-x^2)|$$

$$=|x^n-x^{n+2}+x^{n+1}-x^{n+3}+x^{n+2}-x^{n+4}+\cdots+x^{m-1}-x^{m+1}+x^m-x^{m+2}|$$

بالاختصار نجد :

$$|x^n+x^{n+1}-x^{m+1}-x^{m+2}|=|x^n(1+x)-x^{m+1}(1+x)|$$

$$=|x^n(1+x)(1-x^{m-n+1})|\leq|x^n(1+x)|\leq|p^n(1+p)|<\varepsilon$$

من المتراجحة $|p^n(1+p)|<\varepsilon$ نوجد قيمة n أي قيمة N_0 :

$$\ln p^n(1+p)<\ln\varepsilon$$

$$\ln p^n+\ln(1+p)<\ln\varepsilon$$

$$n \ln p < \ln \varepsilon - \ln(1+p)$$

$$n > N > \frac{\ln \varepsilon - \ln(1+p)}{\ln p}$$

نأخذ $N_0 > \frac{\ln \varepsilon - \ln(1+p)}{\ln p}$ إذاً وجدنا N_0 تابع ل ε بالتالي المتسلسلة متقاربة بانتظام على $[-p, p]$

((كلما تقدمت في العمر ستكتشف أن لك يدين

يد لتساعد بها نفسك

و اليد الأخرى لمساعدة الاخرين))

(أودي هيبورن)

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو

تنسيق: ولاء الأخضر