◀ دكتور المادة: د. بشير قابيل

◀ عنوان المحاضرة:

نظري ☑
عملي ☐

سنذكر في بداية المحاضرة بتابعي مسافة من المهم الإشارة لهما

$\boxed{1}$ المسافة الوترية: ليكن المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ولنعرف عليه التابع

$$d : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(z, z') \longmapsto d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\cdot\sqrt{1+|z'|^2}}$$

إن d تابع مسافة على $\mathbb{C}$ ((الإثبات غير مطلوب لكن من المهم معرفة هذه المسافة))

$\boxed{2}$ P-adic distance: سنبدأ تعريف هذه المسافة من خلال أمثلة تمهيدية و من ثم نطرح التعريف النظري:

مثال $\boxed{1}$: برهن على أنه مهما يكن $x \in N^*$ فإنه يوجد عدد فردي r و $\alpha \in N$ بحيث $x = r\cdot 2^{\alpha}$

(r فردي أي r يقبل القسمة على 2)

فمثلاً لو أخذنا: $x = 14 = \underbrace{7}_{r\text{ فردي}}\cdot 2^{\overset{\alpha}{1}}$

$x = 91 = \underbrace{91}_{r\text{ فردي}}\cdot 2^{\overset{\alpha}{0}}$

$x = 28 = \underbrace{7}_{r\text{ فردي}}\cdot 2^{\overset{\alpha}{2}}$

ولنعرف تابعاً نرمزله $|\cdot|_2$ بالشكل:

$$|\cdot|_2 : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto |x|_2 = 2^{-\alpha} \qquad \left\{ x = \underbrace{r}_{\text{فردي}} \cdot 2^{\alpha \to \in \mathbb{N}^*} \right\}$$

أو $|x|_2 = \dfrac{1}{2^{\alpha}}$

يبرهن على أنّ : $\boxed{1}$ $|x \cdot y|_2 = |x|_2 \cdot |y|_2$

$\boxed{2}$ $|x+y|_2 \leqslant |x|_2 + |y|_2$

سنعرف الآن $d_2 : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d_2(x,y) = \big|\,|x-y|\,\big|_2$$

إن d_2 تعين مسافة على $\mathbb{N}^*$ مثلاً :

$$d_2(5,25) = \big|\,|5-25|\,\big|_2 = |20|_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

سندعوها مسافة مولدة بالنظيم ذو الدليل 2

مثال $\boxed{2}$: بشكل مماثل للمثال السابق برهن أن كل $x \in \mathbb{N}^*$ فإنه يكتب بالشكل $x = r \cdot 3^{\alpha}$ حيث r لا يقبل القسمة على 3 ، $\alpha \in \mathbb{N}$.

وكما سنعرف $|\cdot|_3 : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto |x|_3 = 3^{-\alpha} \qquad \left\{ x = \underbrace{r}_{\text{لا يقبل القسمة على } 3} \cdot 3^{\alpha} \right\}$$

هي تعين أيضاً متركاً على $\mathbb{N}^*$ كما يلي $d_3(x,y) = \big|\,|x-y|\,\big|_3$

وهكذا ...

الآن بعد هذه الأمثلة سنعرف : p-adic distance

$$\forall x \in \mathbb{N}^* ; \quad x = r \cdot p^{\alpha}$$

حيث r لا يقبل القسمة على p و p عدد أولي

وأن $|\cdot|_p : N^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto |x|_p = r \cdot p^{-\alpha}$

وتعين أيضاً دالة المسافة $d_p(x,y) = ||x-y||_p$

في الفضاء المترابط المجموعات المفتوحة والمغلقة معاً هي وفقط هي X, ϕ

n أولي $\Leftrightarrow$ إذا كان $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) + 1 = t$ فإن t يقبل القسمة على n

تمرين: ليكن $X = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$

سنقول أن θ مفتوحة إذا وفقط إذا كان

إما $X = \theta$ أو $\phi = \theta$ أو إذا كانت

$x \in \theta$ نميز الحالات التالية:

- إذا كان $x \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \theta$ عندئذٍ θ مفتوحة.
- إذا كان $x = +\infty$ فإنه يوجد $y \in \mathbb{R}$ بحيث $]y, +\infty] \subseteq \theta$ عندئذٍ θ مفتوحة.
- إذا كان $x = -\infty$ فإنه يوجد $z \in \mathbb{R}$ بحيث $[-\infty, z[\subseteq \theta$ عندئذٍ θ مفتوحة.

أثبت أن صف المفتوحات المعرفة كما سبق هي تبولوجيا على $\overline{\mathbb{R}}$

الحل:

ليكن صف المجموعات θ المفتوحة المعرفة سابقاً هو $\mathcal{T}$

من الواضح أن $X, \phi \in \mathcal{T}$ ((تعريفاً))

- لنثبت أنها مغلقة للتقاطع ، لتكن $\theta_1, \theta_2 \in T$

وليكن $\theta_1 \cap \theta_2 = \theta$ وليكن $x \in \theta$ عندئذٍ نميز :

• $x \in \mathbb{R}$ عندئذٍ : $\exists \varepsilon_1 > 0 :]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\subseteq \theta_1$

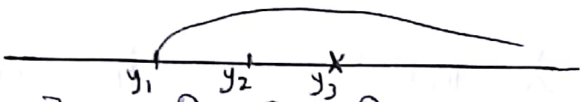
$\exists \varepsilon_2 > 0 :]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subseteq \theta_2$

ولنأخذ $\varepsilon > 0$ بحيث $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ ، $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ (لاحظ $\varepsilon = \frac{Min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2}$)

عندئذٍ $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \theta = \theta_1 \cap \theta_2$

• $x = +\infty$ عندئذٍ : $\exists y_1, y_2 \in \mathbb{R} :]y_1, \infty] \subseteq \theta_1 ,]y_2, \infty] \subseteq \theta_2$

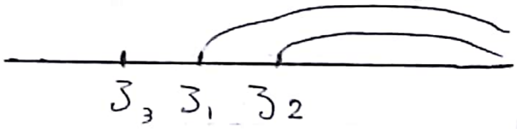
نأخذ $y_3 = Max(y_1, y_2)$ أي $\left\{ \begin{array}{l} y_3 \geqslant y_2 \\ y_3 \geqslant y_1 \end{array} \right.$



عندئذٍ : $]y_3, \infty] \subseteq \theta = \theta_1 \cap \theta_2$

• $x = -\infty$ عندئذٍ : $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{R} : [-\infty, z_1[\subseteq \theta_1 , [-\infty, z_2[\subseteq \theta_2$

نأخذ عندها $z_3 = Min(z_1, z_2)$



فيكون : $[-\infty, z_3[\subseteq \theta = \theta_1 \cap \theta_2$

- لنثبت أنها مغلقة للاتحاد

لنأخذ $\{\theta_i : i \in I\}$ أسرة من عناصر T وليكن $\theta = \bigcup_{i \in I} \theta_i$

وليكن $x \in \theta$:

- في حال $x = +\infty$ عندئذٍ $\exists i \in I : x \in \theta_i$

$\Rightarrow \exists\ ]y, \infty] \subseteq \theta_i \subseteq \theta = \bigcup_{i \in I} \theta_i$ $y \in \mathbb{R}$

- في حال $x = -\infty$ $\exists j \in I : x \in \theta_j$

$\Rightarrow \exists [-\infty, z[\subseteq \theta_j \subseteq \theta = \bigcup_{j \in I} \theta_j$

- في حال $x \in \mathbb{R}$ $\exists k \in I : x \in \theta_k$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 :]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \theta_k \subseteq \theta$

وبذلك يتم المطلوب.

مبرهنة أساسية: لتكن X مجموعة ما لنرمز بـ F لجماعة من المجموعات الجزئية من X وتحقق الشروط التالية:

1. المجموعتان ϕ و $X \in F$
2. تقاطع أي جماعة من F هو عنصر من F
3. اجتماع أي جماعة منتهية من عناصر F هو عنصر من F.

ولنرمز بـ T للجماعة $\{A = X - B = B^c , B \in F\}$ «متممات عناصر F»

عندها T تشكل تبولوجيا على X، كما تكون عناصر F هي المجموعات المغلقة وفق تلك التبولوجيا.

مثال 1: لتكن X مجموعة ما ولنرمز بـ $P(X)$ لجماعة كل المجموعات الجزئية من X «أي مجموعة قوة X» عندئذٍ تكون $P(X)$ تبولوجيا على X ندعوها التبولوجيا المتقطعة «الملساء» ويدعى الفضاء $(X, P(X))$ بالفضاء المتقطع

مثال 2: لتكن X مجموعة ما عندئذٍ تكون $T = \{\phi, X\}$ تبولوجيا على X ندعوها بالتبولوجيا التافهة أو غير المتقطعة.

مثال 4: التبولوجيا المولدة من مسافة.

تعريف (1)م: لتكن X مجموعة غير خالية و d تابع مسافة على X أي (X, d) فضاء متري وليكن $B = \{N(x, \varepsilon) : x \in X , \varepsilon > 0\}$ صف الكرات المفتوحة في هذا الفضاء. إن B قاعدة لتبولوجيا ندعوها T_d التبولوجيا المولدة عن المسافة d حيث نسمي مجموعة مفتوحة في (X, d) كل مجموعة تكتب على شكل اتحاد لكرات مفتوحة، عندئذٍ ندعو T_d تبولوجيا مترية.

تعريف (2)ت: يقال عن الفضاء (X, T) التبولوجي إنه متور إذا وجد متراك d على X بحيث تكون $T = T_d$

مثال 5: إن الفضاء المتقطع متور بالمتراك المعرف كما يلي:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & if \quad x = y \\ 1 & if \quad x \neq y \end{cases}$$

أما إذا أخذنا المجموعة $X = \{a, b\}$ والتبولوجيا $T = \{X, \phi, \{a\}\}$ على X فإن الفضاء التبولوجي (X, T) ليس متوراً.

تعريف (1): لتكن X مجموعة ما، ولتكن كل من τ_1 ، τ_2 تبولوجيا على X يقال عن التبولوجيا τ_1 إنها تبولوجيا أقوى Stronger Tobology أو تبولوجيا أدق Finer Topology من التبولوجيا τ_2 إذا كان $\tau_2 \subseteq \tau_1$ وعندئذٍ يقال عن التبولوجيا τ_2 أنها تبولوجيا أضعف Weaker Topology أو تبولوجيا أخشن Coarser Topology من التبولوجيا τ_1.
أما إذا كان $\tau_2 \subset \tau_1$ فإننا نقول أن τ_1 أقوى تماماً أو أدق تماماً من τ_2 وإن τ_2 أضعف تماماً أو أخشن تماماً من τ_1

ملاحظات:

1. لتكن X مجموعة ما، إن التبولوجيا المتقطعة على X هي أقوى من أي تبولوجيا على X وهي أقوى تماماً من أية تبولوجيا أخرى على X والتبولوجيا التافهة هي أضعف من أية تبولوجيا أخرى X.
2. لتكن X مجموعة ما ولتكن $\{\tau_i\}_{i\in I}$ جماعة من التبولوجيات على X عندئذٍ يكون $\tau = \bigcap_{i\in I} \tau_i$ تبولوجيا على X.
3. ليس من الضروري أن يكون اتحاد جماعة من التبولوجيات على X هو تبولوجيا على X كما يبين المثال:
لتكن $X=\{1,2,3\}$ من السهل التحقق أن كلاً من الجماعتين $\tau_1=\{\phi, X, \{2\}\}$ ، $\tau_2=\{\phi, X, \{1\}\}$ تبولوجيا على X في حين أن الجماعة التالية $\tau_1 \cup \tau_2 = \{\phi, X, \{1\}, \{2\}\}$ لا تكون تبولوجيا على X
4. لتكن X مجموعة ما ولتكن S_0 جماعة غير خالية من المجموعات الجزئية من X إن تقاطع جميع التبولوجيا التي كل منها يحوي S_0 هو تبولوجيا، تسمى هذه التبولوجيا: التبولوجيا المولدة بـ S_0 ويمكن الحصول عليها كما يلي:

1- نأخذ اتحاد الجماعة S_0 مع الجماعة $\{X, \phi\}$ فنحصل على الجماعة S_1

2- نأخذ صف التقاطعات المنتهية لعناصر S_1 ولنسميه B_1

3- نكون الصف الذي كل عنصر منه اتحاد لعناصر من B_1 فيكون هذا الصف هو التبولوجيا المنشودة τ المولدة بالجماعة S_0

مثال: لنأخذ $X = \{1, 2, 3, 4\}$

و $S = \{\{1,2\}, \{1,3\}\}$

$S_1 = \{\phi, X, \{1,2\}, \{1,3\}\}$

$B_1 = \{\phi, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1\}, X\}$

$\tau = \{\phi, X, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1\}, \{1,2,3\}\}$

END

إعداد

رشا رويعي

نذير تيناوي