نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الحادية عشر

◄ عنوان المحاضرة: المرافقات والدليل ومبرهنة لاغرانج

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

- تعاريف
- مبرهنات
- مبرهنة لاغرانج

تعريف : لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G عندئذ :

$$\forall a , b \in G \; ; \; aH = \{ ah : h \in H\}$$

$$\forall a \in G \; ; a \in aH$$

$$\forall a \in G \, , a \in H \iff H = aH \iff$$ زمرة جزئية aH

$$\forall a , b \in G \, , aH \cap bH = \emptyset$$

$$aH = bH \iff b^{-1}a \in H$$

$M_l = \{a H , a \in G\}$ تجزئة للزمرة G

مبرهنة :

لتكن G زمرة جزئية و H زمرة جزئية من G عندئذ القضايا الآتية محققة :

١) أيا كان $a , b \in G$ فإن $b^{-1}a \in H \iff a H = b H$

٢) أيا كان $a , b \in G$ فإن $card\ H = card\ aH = card\ Ha = card\ Hb$

٣) أيا كان $a \in G$ فإن aH زمرة جزئية في $G \iff a \in H$

البرهان

١) ليكن $a, b \in G$

" ⇐ "الفرض ان $aH = bH$ عندئذٍ :

$aH = bH$ لان $aHb^{-1} = Hbb^{-1} = He = H$

" ⇒ "الفرض ان $aHb^{-1} = H$ نضرب ب b

$$Hb = aHb^{-1}b = aH$$

٢) ليكن $a, b \in G$ ، لنعرّف العلاقة:

$$f: aH \longrightarrow bH$$

$$\forall ah \in aH \,, f(ah) = bh \in bH$$

ان f تطبيق متباين لأنه:

$$\forall ah_1, ah_2 \in aH$$

$$\Leftrightarrow ah_1 = ah_2$$

$$\Leftrightarrow bh_1 = bh_2$$

$$\Leftrightarrow f(ah_1) = f(ah_2)$$

ونلاحظ ايضاً ان f تطبيق غامر لأنه اذا كان $bh_0 \in bH$ فإن $ah_0 \in aH,\ h_0 \in H$

$$f(ah_0) = bh_0$$

وبهذا الشكل نجد أن : $card\ aH = card\ bH$

- اثبات مساواة مع $card\ H$ لأجل $e, a \in G$ فإن $card\ aH = card\ eH = card\ H$ حسب المبرهنة السابقة.

٣) ليكن $a \in G$

" ⇒ "الفرض $a \in H$ عندئذٍ: حسب ٢ $aH = H$ وهي زمرة جزئية في G عندئذٍ $e \in aH$
ومنه يوجد $h \in H$ بحيث $e = ah$

$$\Rightarrow a = h^{-1} \in H$$

تتساوى قدرة مجموعتين عندما يوجد تطبيق متباين وغامر بين هذه المجموعتين وعلى هذا الأساس تم إثبات ٢ من المبرهنة السابقة ..

مبرهنة: لتكن G زمرة جزئية و H زمرة جزئية من G عندئذ القضايا الآتية محققة : ١- مجموعه المرافقات اليمينية للزمرة الجزئية H من G تشكل تجزئه للزمرة G

٢-لنفرض ان $M_l = \{aH: a \in G\} \quad , \quad M_r = \{Ha: a \in G\}$ عندئذٍ:

$$card\ M_l = card\ M_r$$

البرهان

١) وظيفة (يتم البرهان بنفس الطريقة التي تم فيها برهان المرافقات اليسارية)
٢) لنعّرف العلاقة :

$$f: M_l \longrightarrow M_r$$

$$\forall aH \in M_l \quad ; \quad f(aH) = Ha^{-1}$$

ان f تطبيق لأنه اذا كان $aH, bH \in M_l$ بحيث $aH = bH$

فإن $a \in bH$ ومنه يوجد $h \in H$ حيث $a = bh$

وبالتالي: $a^{-1} = (bh)^{-1} = h^{-1}b^{-1} \in Hb^{-1}$ وايضاً $\Leftarrow a^{-1} \in Ha^{-1}$ حسب ٣ $Ha^{-1}Hb^{-1} =$

$f(aH) = f(bH)$ ومنه f تطبيق متباين

ليكن $Hd \in M_r$ عندئذٍ $d \in G$ ومنه $d^{-1} \in G$ وإن $d^{-1}H \in M_l$

$$f(d^{-1}H) = H(d^{-1})^{-1} = Hd$$

ومنه f تقابل إذا

$$card\ M_l = card\ M_r$$

" لدينا مرافقات يمينية بقدر ما لدينا من مرافقات يسارية سواء كانت الزمرة منتهية أو غير منتهية "

تعريف : لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G ولنفرض ان $M_l = \{aH : a \in G\}$ مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في G نسمي المقدار $card\ M_l = card\ M_r$ بدليل الزمرة الجزئية H في Gونرمز لذلك $(G:H) = card\ M_l$

يسمى $card\ G$ بمرتبة الزمرة G ونرمز لها بـ $(G:1)$

ينتج من التعريف مباشرة $(G:G) = 1$

ومنه $(G:\{e\}) = (G:1)$

وهذا الكلام صحيح إذا كانت G منتهية أو غير منتهية ...

مرافقات الزمرة G هي واحدة وهي نفسها $\forall\, g \in G \;;\; gG = G = eG$

نحصل ع نفس النتائج في حال كانت المرافقات يمينية أو يسارية لذلك سنستخدم اليسارية في إثبات المبرهنة التالية ..

مبرهنة لاغرانج : لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية فيها عندئذ :

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

الاثبات :

لما كانت G منتهية . لنفرض ان عدد عناصر يساوي n (تحوي n عنصر) ولنفرض ان: (جميع المرافقات اليسارية) $a_1H, a_2H, \dots \dots \dots . . a_nH$ للزمرة الجزئية H في G و

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} a_iH$$

وإن $card\ G = card\ a_1H + card\,a_2H + \cdots + card\ a_nH$

$$= cardH + card\ H + \cdots + card\ H(\text{مرة}\ n)$$

$$= \underbrace{n}_{\text{عدد المرافقات}}\ \underbrace{card\ H}_{H\ \text{عدد عناصر}}$$

$$\underbrace{(G:1)}_{G\ \text{عدد عناصر}} = n(H:1)$$

$$= \underbrace{(G:H)}_{H\ \text{عدد مرافقات}}\ (H:1)$$

ملاحظة: يمكن صياغة مبرهنة لاغرانج بأكثر من طريقة كما تعد واحدة من المبرهنات الاساسية والهامة في نظرية الزمر ...

تمارين محلولة ..

التمرين الأول: لتكن n, k, m أعداد صحيحة موجبة ، ولنفرض أن m يقسم k و k يقسم n

أثبت أن $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U_m(n)$

الحل :

بما ان m يقسم k و k يقسم n يوجد $s, t \in z$ بحيث $k = sm$ و $n = tk$ ومنه $n = tsm$

أي أن m يقسم n بما ان كلا من $m\,,k$ قواسم للعدد n فإنه حسب تمهيديات سابقة كلا من $U_k(n)$ و $U_m(n)$ زمر جزئية من $U(n)$ .. وبالتالي يكفي كي تكون $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U_m(n)$ أن نبرهن $U_k(n) \subseteq U_m(n)$.

ليكن $y \in U_k(n)$ عندئذ $y \in U(n)$ ويحقق $y \equiv 1 \; mod - k$ وبالتالي يوجد $a \in Z$ بحيث $y = ak + 1$ ومنه $y = asm + 1$ أي أن $y \equiv 1 \; mod - m$ وبالتالي $y \in U_m(n)$

وهذا يبين لنا أن $U_k(n) \subseteq U_m(n)$ أي ان $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U_m(n)$ ..

التمرين الثاني: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . عندئذ أيا كان $a \in G$ فإن :

- المجموعة aHa^{-1} زمرة جزئية من G تسمى الزمرة المرافقة للزمرة H .
- إذا كانت الزمرة H تبديلية فإن الزمرة aHa^{-1} أيضا تكون تبديلية .

الـــحـــل :

- وواضح أن $aHa^{-1} \neq \emptyset$. ليكن $x, y \in aHa^{-1}$ عندئذ يوجد $h_1\,, h_2 \in H$ بحيث $x = ah_1a^{-1}$ و $y = ah_2a^{-1}$ ومنه :

$$xy^{-1} = (ah_1a^{-1})(ah_2a^{-1}) = (ah_1a^{-1})\left(ah_2{}^{-1}a^{-1}\right) = ah_1h_2{}^{-1}a^{-1}$$

وبما ان H زمرة جزئية فإن $h_1h_2{}^{-1} \in H$ وبالتالي $xy^{-1} = a\left(h_1h_2{}^{-1}\right)a^{-1} \in aHa^{-1}$

- وواضح أنه إذا كانت H تبديلية فإن $xy = yx$ وذلك أيا كان $x, y \in aHa^{-1}$.

التمرين الثالث: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . إن المجموعة

$$C(H) = \{x : x \in G \;\; ; xh = xh \;:\; \forall h \in H\}$$

تشكل زمرة جزئية من G تسمى مركز الزمرة H في G .

الـــحـــل :

وواضح ان $C(H) \neq \emptyset$ لأن $e \in C(H)$. ليكن $x, y \in C(H)$ عندئذ : أيا كان $h \in H$ فإن $xh = hy$ و $yh = hy$ ومنه $y^{-1}h = hy^{-1}$ وبالتالي :

$$(xy^{-1})h = x(y^{-1}h) = x(hy^{-1}) = (xh)y^{-1} = (hx)y^{-1} = h(xy^{-1})$$

وهذا يبين لنا أن $xy^{-1} \in C(H)$ أي أن $C(H)$ زمرة جزئية من G.

التمرين الرابع: لنفرض أن $H = \{x : x \in U(20) : \quad x \equiv 1 \; mod - 3\}$

هل H زمرة جزئية من الزمرة $U(20)$ ؟؟

الــحــل :

لدينا $U(20)=\{1,3,7,9,11,13,17,19\}$ وأن $H=\{1,7,13,19\}$. نلاحظ أن $13\in H$ بينما $13.13\notin H$. وبالتالي H ليست زمرة جزئية من $U(20)$.

التمرين الخامس: لتكن G زمرة تبديلية و $n\in Z$. أثبت أن المجموعة

$$K=\{x:x\in G \quad : \quad x^n=e\}$$

زمرة جزئية من G .

الــحــل :

واضح أن المجموعة K غير خالية . ليكن $x,y\in G$ عندئذ :

$$(xy^{-1})^n=x^n(y^{-1})^n=x^n(y^n)^{-1}=e$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة K زمرة جزئية من G .

التمرين السادس: .. لتكن S مجموعة غير خالية مزودة بعملية تجميعية (.) تحقق الاختصار من اليمين واليسار ، (أي أنه أيا كان $x,y,z\in S$ بحيث $xy=xz$ أو $yx=zx$ فإن $y=z$) ولنفرض أنه أيا كان $a\in S$ فإن المجموعة $\{a^k \quad : \quad k=1,2,\dots\}$ منتهية . أثبت ان $(S\ ,\ .)$ زمرة .

الــحــل :

ليكن $a\in S$. بما أن المجموعة $\{a^k \quad : \quad k=1,2,\dots\}$ منتهية يوجد $1\ \geq n\ ,m$ بحيث $n\neq m$ وأن $a^n=a^m$. لنفرض أن $n>m$ عندئذ $a^{m-n+1}a^m=aa^n$ وحسب قانون الاختصار فإن $a^{m-n+1}=aa$. لنفرض أن $r(a)=m-n+1>1$ ومنه أيا كان $x\in S$ فإن $aa^{r(a)-1}x=a^{r(a)}x=ax$ وبالتالي $a^{r(a)-1}x=x$. بشكل مشابه نجد أن $x\,a^{r(a)-1}=x$ وهذا يبين لنا أن $a^{r(a)-1}=e$ هو عنصر حيادي في S وهذا الحيادي وحيد . إذا كان $r(a)=2$ عندئذ $a^2=a=e$ أي أن $a=a^{-1}$. إذا كان $r(a)>2$ عندئذ $a^{r(a)-2}a=e$ أي أن $a^{r(a)-2}$ مقلوب للعنصر a . .

مما سبق نجد أن $(S\ ,\ .)$ زمرة ..

انتهت المحاضرة

إعداد: رهف دادا – آية اليافي – آية بسيكي