نظري

◀ دكتور المادة : يوسف الوادي

◀ المحاضرة : الثالثة ◀ عنوان المحاضرة: مبرهنات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١-مبرهنة للمودول المولد

٢-مبرهنة لخواص المودول الجزئي

٣- تعريف التشاكل المودولي

مراجعة: ليكن M مودولا على حلقة R ولتكن S مجموعة جزئية من Mيعرف المودول الجزئي المولد ب S على انه تقاطع جميع المودولات الجزئية من M والذي يحوي كل منها المجموعة S ويرمز له ب$<S>$

تعريف : نرمز ل مجموعة جميع التراكيب الخطية لعناصر S بالرمز $LC(S)$

مبرهنة : إذا كان M مودولا على الحلقة R وكانت S مجموعة ما من M $(S \subseteq M)$ فإن:

$$< S > = \begin{cases} 0_M & ; \quad S = \emptyset \\ LC(S) & ; \quad S \neq \emptyset \end{cases}$$

الإثبات :

إذا كانت $S = \emptyset$ فإن أصغر مودول جزئي من M يحوي $\emptyset$ هو المودول الصفري 0_M وإذا كانت $S \neq \emptyset$

$$\forall x \in < S > \Leftarrow$$

فإن $x = 1_R . x$ تركيب خطي

$$x \in LC(S) \Leftarrow$$

$$< S > \subseteq LC(S) \Leftarrow$$

بما ان $< S >$ هو أصغر مودول جزئي من M يحوي S تعريفا

$$LC(S) \subseteq < S > \Leftarrow$$

$\Leftarrow LC(S) =< S >$ وهو المطلوب.

مجموع مودولات جزئية : لتكن M مودولا على R ولتكن $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ أسرة منتهية من المودولات الجزئية من M لنعرف المجموعة:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \left\{ x \in M : \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \; x_i \in M_i \quad ; \forall i = 1, \dots \dots, n \right\}$$

$$M_1 + M_2 + \cdots \dots \dots . + M_n = \{m_1 + m_2 + \cdots \dots . . + m_n : m_i \in M_i\}$$

هل يشكل مودولا جزئي من M ؟؟؟!!

مبرهنة : إذا كان M مودولا على حلقة R وكانت $M_1, M_2, \dots . . , M_n$ مودولات جزئية من M فإن المجموع : $\sum_{i=1}^{n} M_i$ يشكل مودولا جزئيا من M

الإثبات :

$0_M \in \sum_{i=1}^{n} M_i$ لأن كل من $M_1, M_2, \dots . . , M_n$ مودولات جزئية من M وبالتالي

$\mathbf{1 \le i \le n}$ لكل $_M \in \mathbf{M_i}$ وبذلك $0_M = 0_M + \cdots \dots . . + 0_M$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \neq \emptyset$$

وكذلك فإن $\sum_{i=1}^{n} M_i \subseteq M$ لأن عناصر المجموع جميعها تقع في M

$$\Leftarrow \emptyset \neq \sum_{i=1}^{n} M_i \subseteq M$$

من وجهت نظر ثانية :

$$\forall \alpha, \beta \in R \;, \forall x, y \in \sum_{i=1}^{n} M_i$$

حيث: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \; ; x_i \in M_i$ لكل $1 \le i \le n$

و $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \; ; y_i \in M_i$ لكل $1 \le i \le n$

والآن : $\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i$

$$\Leftarrow \alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta y_i$$

$$= \alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) \in \sum_{i=1}^{n} M_i$$

وبذلك يتم المطلوب .

مبرهنة: لتكن A, B, C ثلاثة مودولات جزئية من المودول M على حلقة R وكان $C \subseteq A$ عندها أثبت أن :

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$$

الحل

- إن A, B, C مودولات جزئية
فإن $B + C$ مودول جزئي في M. (حسب المبرهنة بأول لمحاضرة)
وأن $A \cap (B + C)$ مودول جزئي في M. (حسب مبرهنة أن التقاطع لمودولات جزئية هو مودول جزئي)
وأن $A \cap B$ مودول جزئي في M . وأن $(A \cap B) + C$ مودول جزئي في M.
لنبرهن الآن على الاحتوائين : ليكن

$$x \in A \cap (B + C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{و} \\ x \in b + c : b \in B \,, c \in C \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \underbrace{x}_{\in A} - \underbrace{c}_{\in C \subseteq A} \Rightarrow b \in A$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{b}_{\in A \cap B} + \underbrace{c}_{\in C} \in (A \cap B) + C$$

$$\Rightarrow A \cap (B + C) \subseteq (A \cap B) + C$$

الاحتواء المعاكس :ليكن

$$y \in (A \cap B) + C \Rightarrow y = a + c \;;\; a \in A \cap B \,, c \in C$$

إن

$$y = \underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{c}_{\in C \subseteq A} \in A + A = A$$

وكذلك

$$y = \underbrace{a}_{\in B} + \underbrace{c}_{\in C} \in B + C$$

$$\Rightarrow y \in A \cap (B + C)$$

$$\Rightarrow (A \cap B) + C \subseteq A \cap (B + C)$$

من الاحتوائين تحققت المساواة نجد: $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$

تعريف التطبيق : علاقة تربط كل عنصرمن المنطلق بعنصر من المستقر ويكون وحيد

التشاكل الزمري: لتكن G،G' زمرتان وليكن التطبيق $f: G \to G'$ عندئذ: نقول عن fانه تشاكل زمري اذا و فقط اذا تحقق الشرط:

$$\forall x, y \in G : f(x.y) = f(x).f(y)$$

تعريف التشاكل المودولي : ليكن N, M مودولين على الحلقة A عندئذ نقول عن التطبيق $f : M \longrightarrow N$ أنه تشاكل مودولي إذا تحقق : $\forall x, y \in M \quad , \forall \lambda \in A$

١) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

٢) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

فإن f يدعى تشاكل مودولي .

حل تمرين المحاضرة السابقة:

تمرين(١): لتكن $(M, +)$ زمرة تبديلية أثبت أنMمودول على Z لنعرف على M قانوني تشكيل الأول داخلي

$$+: M \times M \to M$$
$$(m_1, m_2) \longmapsto (m_1 + m_2) \in M$$

والثاني خارجي: $. : Z \times M \to M$

$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha x = \begin{cases} x + x + \cdots .. + x; \alpha > 0 \\ 0 \qquad ; \alpha = 0 \\ (-x) + (-x) + \cdots .. (-x); \ \alpha < 0 \end{cases}$$

الحل:لنناقش الحالات التالية

$$\boxed{\forall a, b \in M , \forall \alpha, \beta \in Z; \alpha, \beta > 0}$$

$$(1) \quad 1.a = a$$

$$(2) \quad (\alpha+\beta)a = \underbrace{a + a + \cdots \ldots + a}_{\text{مرة}(\alpha+\beta)} = \underbrace{a + a + \cdots \ldots + a}_{\text{مرة}(\alpha)} + \underbrace{a + a + \cdots \ldots + a}_{\text{مرة}(\beta)} = \alpha a + \beta a$$

$$(3) \quad \alpha(a+b) = \underbrace{(a+b) + \cdots \ldots + (a+b)}_{\text{مرة}(\alpha)} = \underbrace{a + a + \cdots \ldots + a}_{\text{مرة}(\alpha)} + \underbrace{b + b + \cdots + b}_{\text{مرة}(\alpha)}$$

$$= \boldsymbol{\alpha} a + \alpha b$$

$$(4) \quad (\alpha.\beta)a = \underbrace{a + a + \cdots \ldots + a}_{\text{مرة}(\alpha.\beta)} = \underbrace{\underbrace{a + a + \cdots \ldots + a}_{\text{مرة}(\beta)} + \underbrace{a + a + \cdots \ldots + a}_{\text{مرة}(\beta)}}_{\text{مرة}(\alpha)}$$

$$= \alpha(\beta.a)$$

$$\boxed{\forall a, b \in M, \forall \alpha, \beta \in Z; \alpha, \beta < 0}$$

$$(1) \quad 1.a = a$$

$$(2)\quad (\alpha+\beta)a = \underbrace{(-a)+(-a)+\cdots\ldots+(-a)}_{\text{مرة}\,-(\alpha+\beta)}$$

$$= \underbrace{(-a)+(-a)+\cdots\ldots+(-a)}_{\text{مرة}\,-(\alpha)} + \underbrace{(-a)+(-a)+\cdots\ldots+(-a)}_{\text{مرة}\,-(\beta)} = \alpha a+\beta a$$

$$(3)\quad \alpha(a+b) = \left(\underbrace{-(a+b))+\cdots\ldots+(-(a+b)}_{\text{مرة}\,(-\alpha)}\right)$$

$$= \underbrace{(-a)+(-a)+\cdots\ldots+(-a)}_{\text{مرة}\,(-\alpha)} + \underbrace{(-b)+(-b)+\cdots..+(-b)}_{\text{مرة}\,(-\alpha)}$$

$$= \boldsymbol{\alpha}\mathrm{a}+\alpha\mathrm{b}$$

$$(4)\quad (\alpha.\beta)a = \underbrace{(-a)+(-a)+\cdots\ldots+(-a)}_{\text{مرة}\,-(\alpha.\beta)}$$

$$= \underbrace{\underbrace{(-a)+(-a)+\cdots\ldots+(-a)}_{\text{مرة}\,(-\beta)} + \underbrace{(-a)+(-a)+\cdots\ldots+(-a)}_{\text{مرة}\,(-\beta)}}_{\text{مرة}\,(-\alpha)}$$

$$,= \alpha(\beta.a)$$

ومنه M مودول على Z

تمرين (٢): إذا كانت R حلقة واحدية وليكن $n \in Z^+$ نعرف على R^n عملية $(+)$ كما يلي:

$$(x_1,\ldots\ldots,x_n)+(y_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots\ldots\ldots,x_n+y_n)$$

ولنعرف عملية الضرب(.)على النحو التالي :

$$\alpha(x_1,\ldots\ldots,x_n) = (\alpha x_1,\ldots\ldots,\alpha x_n)$$

$$\forall\alpha\in R;\forall(x_1,\ldots\ldots,x_n)\in R^n$$

أثبت أن R^n مودولا يساريا على R

الحل: ان $(R^n,+)$ زمرة تبديلية لأن $\forall(z_1,\ldots\ldots,z_n),(y_1,\ldots\ldots,y_n),(x_1,\ldots\ldots,x_n)\in R^n$

$$(1)\quad (x_1,\ldots\ldots,x_n)+(0,\ldots\ldots,0) = (x_1+0,\ldots\ldots x_n+0)$$

$$= (x_1,\ldots\ldots,x_n)$$

ومنه الحيادي موجود

$$(2)\quad (x_1,\dots,x_n)+(-x_1,\dots\dots,-x_n)=(x_1-x_1,\dots\dots,x_n-x_n)$$
$$=(0,\dots\dots\dots,0)$$

ومنه النظير موجود

$$(3)\quad \big((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\big)+(z_1,\dots\dots,z_n)$$
$$=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)+(z_1,\dots,z_n)$$
$$=\big((x_1+y_1)+z_1,\dots\dots,(x_n+y_n)+z_n\big)$$

وبما ان R حلقة فالخاصة التجميعية محققة فيها أي

$$=\big(x_1+(y_1+z_1),\dots\dots,x_n+(y_n+z_n)\big)$$
$$=\quad (x_1,\dots,x_n)+\big((y_1,\dots,y_n)+(z_1,\dots\dots,z_n)\big)$$

إذا الخاصة التجميعية محققة ومنه $(R^n,+)$ زمرة لنثبت انها تبديلية

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)$$
$$=\ (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

وبما انها Rحلقة تبديلية

$$=(y_1+x_1),\dots\dots,(y_n+x_n)$$
$$=(y_1,\dots,y_n)+(x_1,\dots,x_n)$$

ومنه $(R^n,+)$ زمرة تبديلية

$$\forall (y_1,\dots,y_n),(x_1,\dots\dots,x_n)\in R^n$$
$$\forall \alpha,\beta\in R$$
$$(1)\quad 1_R.(x_1,\dots,x_n)=(1_R.x_1,\dots\dots,1_R.x_n)$$

وبما أن R حلقة فإن$=(x_1,\dots\dots,x_n)$

$$(2)\quad \alpha\big((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\big)$$
$$=(\alpha(x_1+y_1),\dots\dots,\alpha(x_n+y_n))$$
$$=(\alpha x_1,\dots\dots,\alpha x_n)+(\alpha y_1,\dots,\alpha y_n)$$
$$=\alpha(x_1,\dots\dots,x_n)+\alpha(y_1,\dots\dots,y_n)$$

$$(3) \quad (\alpha.\beta).(x_1,\ldots\ldots,x_n) = \big((\alpha.\beta).x_1,\ldots\ldots,(\alpha.\beta).x_n\big)$$

بما ان R حلقة فإن شرط تجميعية محقق

$$= (\alpha(\beta.x_1),\ldots\ldots,\alpha(\beta.x_n))$$

$$= \alpha(\beta.x_1,\ldots\ldots,\beta.x_n)$$

$$(4) \quad (\alpha+\beta)(x_1,\ldots\ldots,x_n)$$

$$((\alpha+\beta)x_1,\ldots\ldots,(\alpha+\beta)x_n)$$

بما أن R حلقة فإن شرط توزيعي الضرب على الجمع محقق

$$\alpha x_1 + \beta x_1,\ldots\ldots,\alpha x_n + \beta x_n$$

$$\alpha(x_1,\ldots\ldots,x_n) + \beta(x_1,\ldots\ldots,x_n)$$

ومنه R^n مودول على R

تمرين (٣) إذا كانت R حلقة وكان I مثالي في R فأثبت أن I مودول على R

الحل: بما ان I مثالي فإن $(I,+)$ زمرة تبديلية ولنعرف على I قانوني تشكيل خارجي

$$. : R \times I \to I$$

$$(a,i) \longmapsto a.i$$

$$\forall x,y \in I \quad ,\alpha,\beta \in R$$

$$(1) \quad 1_R x = x$$

$$(2) \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(3) \quad (\alpha+\beta).x = \alpha x + \beta x$$

$$(4) \quad (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$$

مما سبق نجد ان I هو مودول على R

تمرين (٤) ليكن $f: R \to S$ تشاكل حلقي نعرف $r.s$ على نحو التالي

$r.s = f(r).s$ أثبت أن S مودولا على R ؟

الحل: بما أن S حلقة فإن $(S,+)$ زمرة تبديلية حياديها 0_S $\quad ,x,y \in S \quad \forall \alpha,\beta \in R$

$$(1) \quad 1_R.x = x$$

$$(2) \quad (\alpha+\beta).x = f(\alpha+\beta).x = [f(\alpha)+f(\beta)].x$$
$$= f(\alpha).x + f(\beta).x = \alpha x + \beta x$$

$$(3) \quad \alpha(x+y) = f(\alpha)(x+y) = f(\alpha).x + f(\alpha)y$$
$$= \alpha x + \alpha y$$

$$(4) \quad \alpha(\beta.x) = f(\alpha).(f(\beta).x) = (f(\alpha).f(\beta)).x$$
$$= (\alpha.\beta).x$$

ومنه S مودول على R

تمرين (٥) اذا كان M مودولا على حلقة R فأثبت أن $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$

$$\forall x \in M \quad , \quad \forall \alpha \in R$$

الحل: إن $0_M = 0_R.x = (\alpha-\alpha).x = [\alpha+(-\alpha)].x$

أي $\alpha.x + (-\alpha).x = 0$ ومنه $-(\alpha.x) = (-\alpha).x \quad \ldots.(1)$

وبما أن $0_M = \alpha.0_M = \alpha(x-x) = \alpha[x+(-x)]$

$$\alpha x + \alpha(-x) = 0$$

أي أن $-(\alpha.x) = \alpha(-x) \quad \ldots..(2)$

من (١) و (٢) نجد أن $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$

إعداد: هلا همج – رغد جوده – بكر مشرف