◀ دكتور المادة: محمد الشيخ

نظري

◀ المحاضرة : العاشرة ◀ عنوان المحاضرة: توبولوجيا الأعداد العقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتتمة عن بعض المفاهيم التبولوجية.

٢ـمبرهنات مهمة.

٣ـ حل تمرين وظيفة .

١ـ نقطة تجمع (تراكم) مجموعة أو نقطة حدية لمجموعة :

لتكن $A \subseteq \mathbb{C}$ نقول عن نقطة $a \in \mathbb{C}$ أنها نقطة تجمع لـ A إذا وفقط أذا تحقق ما يلي :
إذا حوى أي جوار لـ a نقطة من A مغايرة لـ a أي أذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, D(a\,,\varepsilon\,) \cap A\backslash\{a\} \neq 0$$

ونرمز لمجموعة بالنقاط الحدية بالرمز A' نسميها المجموعة المشتقة .

في $\mathbb{C}$ لا فرق بين النقطة الحدية ونقطة التراكم .

◀ **ملاحظة** المجموعة المشتقة لمجموعة منتهية هي خالية Aمغلقة $\leftrightarrow A' \subseteq A$

مثال

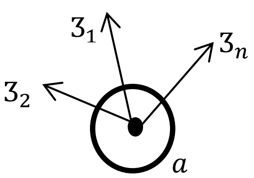
أي مجموعة منتهية في $\mathbb{C}$ تكون مغلقة.

الإثبات:

لنأخذ: $A = \{3_1\,,3_2, \dots \dots, 3_n\}$ منتهية

لنفرض جدلاً أن لهذه المجموعة نقطة تجمع a عندئذ نناقش حالتين :

١- $a \in A^c$ نأخذ بعد النقطة a عن كلاً من $3_1, 3_2, \dots \dots, 3_n$ وجميع هذه الأبعاد لا تساوي الصفر
لأن $a \in 3_i$ حيث أن $i = 1,2,..n$ ولنأخذ



$$\delta = \frac{\min(d(a,3_1),d(a,3_2),\dots\dots,d(a\,,3_n))}{2}$$

عندئذ : $D(a\,,\delta) \cap A = \emptyset$

بالتالي a ليست حدية

٢- $a \in A$ أي تكون a مساوياً لأحد النقاط $z_1, z_2, \dots \dots, z_n$ فنأخذ بعد هذه النقطة عن هذه الأبعاد بنفس الطريقة نأخذ الـ min بين بعد a , z_i حيث أن $i = 1,2,..n$ ونأخذ القرص الذي مركزه هذه النقطة ونصف قطره ذلك البعد

والآن هذا القرص سيتقاطع مع المجموعة بالنقطة نفسها

$\Leftarrow$ a ليست حدية

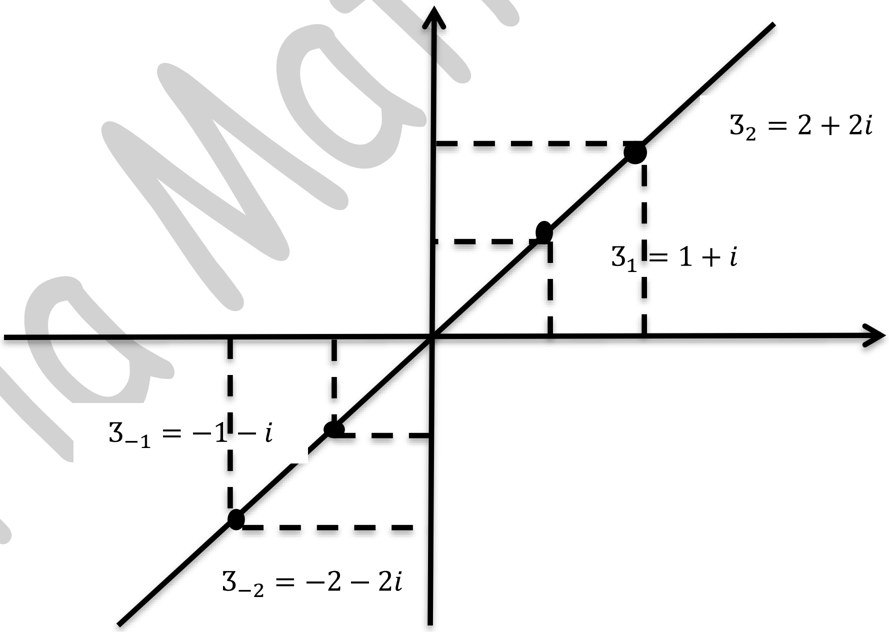
بالتالي الفرض خاطئ فلا يوجد نقطة تجمع أو نقطة حدية لمجموعة منتهية

◀ملاحظة إن المجموعة المنتهية ليس لها نقاط تجمع .

- هل المجموعة غير المنتهية في الحالة العامة تملك نقاط تجمع ؟

الجواب: لا ليس من الضروري أن تملك مجموعة غير منتهية نقاط تجمع ،

ومثال على ذلك المجموعة: $A = \{z_m = m + im \,; m \in Z^*\}$



$a \in \mathbb{C}$ ولنميز الحالات التالية :

[1] $a \in A \Leftarrow \exists m_0 \in \mathbb{Z} \,; \; a = m_0 + im_0$

بحيث $D\left(a\,,\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \cap A = \{a\}$ أو بصيغة أخرى $D\left(a\,,\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \cap A\backslash\{a\} = \emptyset$

[2] a تنتمي إلى منصف الرابع الأول والثالث وليست من A ومنه يوجد $m \in \mathbb{Z}$ بحيث تكون a واقعة بين النقطتين z_m , z_{m+1} دون أن تكون واحدة منها

$$\delta = \frac{\min(|z_m - a|, |z_{m+1} - a|)}{2} > 0$$

$D(a\,,\delta) \cap A\backslash\{a\} = \emptyset$ و a ليست نقطة تجمع لـA

التوضيح:هو أن تقع a على المنصف الحامل للنقاط لكنها تقع على المنصف بين النقطتين ، افترضنا أنها تقع بين النقطتين z_m ، z_{m+1} ونأخذ ال min ونقسم على ٢

الان لو رسمنا قرص مركزه النقطة ولكن النقطة من الأصل ليست في المجموعة بالتالي فإن القرص لن يحوي أي نقطة تجمع .

[3] a ليست من المنصف للربع الأول والثالث ولنرمز له بـ L عندئذ:

$$\delta = \frac{d(a\,,L)}{2} > 0$$

$$D(a,\delta) \cap A\backslash\{a\} = \emptyset$$

و a ليست نقطة تجمع لـ A

المجموعات $N\,,Z$ لا تحوي نقاط تجمع .

تمرين وظيفة :

أثبت أن للمجموعة $B = \left\{z_m = \frac{1}{m} + i\frac{1}{m}\ ; m \in N\right\}$ نقطة تجمع وحيدة $z = 0$

- هل من الممكن أن نضع شرطاً على المجموعة غير المنتهية حتى تملك نقطة تجمع ؟؟!!

إجابة هذا السؤال هي نعم ، أن تكون المجموعة محدودة .

المجموعة المحدودة :نقول عن مجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$ أنها محدودة **إذا** وجد عدد حقيقي $M > 0$ بحيث تكون

$$|z| < M\ ; \quad \forall z \in A$$

ويمكننا أن نقول $|z| \leq M\ ; \forall z \in A$

هندسياً: نقول عن مجموعة A محدودة إذا استطعنا أن نجعلها محتواه في قرص نصف قطره منته

((أي نصف قطره أصغر من ∞)).

مبرهنه: كل مجموعة غير منتهية ومحدودة تملك نقطة تجمع.

مثال إن المجموعة $A=\left\{3_n=\frac{1}{n}+i\frac{1}{n}\ \ ;n\in N\right\}$

تملك نقطة تجمع لأنها مجموعة غير منتهية ومحدودة.

هندسياً : لأن أبعد نقطة عن المبدأ هي $1+i$ ولأنها محتواة في القرص $D(0,2)$ ((أي عدد أكبر من $\sqrt{2}$لأن أبعد نقطة عن المبدأ هي $1+i$وبعدها $\sqrt{2}$))

تحليلياً: $;n\geq 1$ $\left|\frac{1}{n}+i\frac{1}{n}\right|=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{n}$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{n}\leq\sqrt{2}<2\quad \forall n\in N$$

وهي محدودة فحسب المبرهنة فإن A تملك نقطة تجمع واحدة على الأقل .

تعريف : لصاقة مجموعة :

لتكن $A\subseteq\mathbb{C}\,,a\in\mathbb{C}$ نقول عن a أنها نقطة ملاصقة لـ A إذا حوى أي جوار لها نقطة واحدة على الأقل من A كما نرمز لمجموعة النقاط الملاصقة لِ A بالرمز $\bar{A}$

◄ملاحظات :

1- إن $A\subseteq\bar{A}$ لكن الاحتواء المعاكس غير صحيحة بالحالة العامة ألا إذا كانت المجموعة A مغلقة عندئذ نستطيع أن نقول :

A مغلقة $\Leftrightarrow \bar{A}=A$ (أي أن لصاقة أي مجموعة منتهية هي مجموعة ذاتها)

2- $\bar{A}=A\cup A'$

3- كل نقطة تجمع هي نقطة ملاصقة.

خارج مجموعة: لتكن $A\subseteq\mathbb{C}$ عندئذ نعرف خارج مجموعة A بأنه داخل متممتها ونرمز لها بالرمز $Ext(A)$ أي: $Ext(A)=(A^c)^\circ$

محيط مجموعة (جهة مجموعة A): نرمز لمحيط مجموعة A بالرمز ∂A أو بالرمز $Fro(A)$

لتكن $A\subseteq\mathbb{C}$ عندئذ : $\partial A=Fro(A)=\bar{A}\cap\overline{A^c}$

$a \in \partial A$ محيطية نقول عن a أنها محيطية ل A إذا وفقط إذا تقاطع أي جوار لها مع A ومع متممه A أي إذا وفقط إذا حوى أي جوار لها نقطة من A ونقطة من متممتها

مثال: محيط قرص مفتوح (المحيط ليس من القرص) أو مغلق (المحيط من القرص) هو الدائرة المحيطة به

- أي نقطة من دائرة الوحدة هي نقطة محيطية لقرص الواحدة ومحيطها قرص الواحدة ((التوبولوجي)) هو محيط قرص الواحدة الهندسي .

***حل تمرين الوظيفة:** أوجد العلاقة بين الإحداثيات للنقطة الممثلة للعدد العقدي على كرة ريمان وبين الإحداثيات الديكارتية لهذا العدد العقدي والعكس.

لنفرض أن $\mathfrak{z} = x + iy$ ومسقطه الكروي $P(x_1, x_2, x_3)$

المطلوب تعيين x_1, x_2, x_3 بدلالة x, y والعكس .

إن النقطة P هي نقطة من الكرة

ليكن $\mathfrak{z} = x + iy$ ، $M(x, y, 0)$ ، ومسقطه الكروي $P(x_1, x_2, x_3)$

وبما أن $P \in S^2 \backslash \{N\}$ عندئذٍ : P يحقق معادلة كرة الواحدة

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 1 \quad \dots *$$

إن $\overrightarrow{NP} // \overrightarrow{NM}$ ومنه :

$$\overrightarrow{NP} = \lambda . \overrightarrow{NM} \qquad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3 - 1) = \lambda(x, y, -1) = (\lambda x, \lambda y, -\lambda)$$

تقابل المساقط

$$** \dots \begin{cases} x_1 = \lambda x \\ x_2 = \lambda y \\ x_3 = 1 - \lambda \end{cases}$$

نعوض في * :

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + (1 - \lambda)^2 = 1$$

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 1$$

$$\lambda^2 (x^2 + y^2 + 1) - 2\lambda = 0$$

$$\lambda[\lambda(x^2 + y^2 + 1) - 2] = 0$$

إما $\lambda = 0$ هذا يعني أن $N = P$ ولكن لا يمكن أن تكون Nمسقطاً لعدد عقدي على الكرة ومنه $\lambda = 0$ مرفوض .

أو $\lambda = \frac{2}{x^2+y^2+1}$ نعوض في **:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+1} = \frac{2Re\, z}{|z|^2+1} \\ x_2 = \frac{2y}{x^2+y^2+1} = \frac{2Im\, z}{|z|^2+1} \\ x_3 = 1 - \frac{2}{x^2+y^2+1} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \end{cases}$$

وهذه العلاقات تعطي الإحداثيات لمسقط عدد عقدي على كرة ريمان ((يجب حفظ هذه العلاقات))

إيجاد العكس وظيفة أي إيجاد xy بدلالة x_1, x_2, x_3 .

مثال: أوجد العلاقة الممثلة للعدد العقدي$1 + i$ على كرة ريمان أو أوجد الإحداثيات الكروية للعدد العقدي $1 + i$

$$x_1 = \frac{2Re(1 + i)}{|1 + i|^2 + 1} = \frac{2}{2 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{2Im\,(1 + i)}{|1 + i|^2 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{|1 + i|^2 - 1}{|1 + i|^2 + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

$\Leftarrow P(\frac{2}{3} , \frac{2}{3} , \frac{1}{3})$ هي النقطة الممثلة ل $1 + i$ على كرة ريمان .

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى