٢٠١٨/١٠/١٦

نظري

◄ دكتور المادة: جمال الملي

◄ المحاضرة: السابعة ◄ عنوان المحاضرة: المتتاليات في الفضاء المتري

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ مبرهنة اللصاقة والمجموعة المغلقة .

٢ ـ الفضاء التام .

٣ ـ الفضاء الجزئي التام .

مبرهنة (اللصاقة , المجموعة المغلقة):

ليكن لدينا (X,d) فضاء متري وليكن لدينا M مجموعة جزئية من X غير خالية ولتكن $\bar{M}$ لصاقتها عندئذٍ.

١ـ الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \in \bar{M}$ هو أن توجد متتالية $\{X_n\}$ في M بحيث $x_n \to x$

الإثبات :

$(\Rightarrow)$ لنفرض أن $x \in \bar{M}$ عندئذٍ: إما $x \in M$ فإن المتتالية الثابتة $x \to x$ $x, x \dots \dots \dots, x$ إن هذه المتتالية الثابتة تسعى إلى x.

إذن استطعنا إيجاد متتالية من عناصر M تسعى إلى x ومنه يتم المطلوب.

أما إذا كانت في $x \notin M$ فإن x نقطة تراكم ل M ولنأخذ الكرة مفتوحة $B(x,\varepsilon)$ مركزها x ونصف قطرها ε وليكن $(\varepsilon = \frac{1}{n})$ تتقاطع مع M بتقاطع غير فارغ عندئذ يوجد عنصر حيث :

$$n = 1,2,3 \dots \dots \dots \dots, d(x,x_n) < 1$$

$$n = 1 \Rightarrow \varepsilon = 1 \quad ; x_1 \in B(x,1); d(x_1,x) < 1$$

$$n = 2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2} \quad ; x_2 \in B\left(x,\frac{1}{2}\right); d(x_2 x) < \frac{1}{2}$$

.

Syria Math Team

$$n = n \Longrightarrow \varepsilon = \frac{1}{n} \qquad ; x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) ; d(x_n, x) < \frac{1}{n}$$

وبالتالي أصبح لدينا عدد غير منته من الكرات التي مركزها x ونصف قطرها يسعى إلى الصفر وبالتالي إذا أخذنا المتتالية

$(x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots, x_n)$ حيث هذه العناصر من M ومختلفة عن x وإن :

$$0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n}$$

لنأخذ نهاية الأطراف.

لدينا $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

وذلك حسب مبرهنة الإحاطة . أي أن $x_n \to x$

(⇐) إثبات العكس :

لنبرهن أن $\exists x_n \in M ; x_n \to x$

في حال كانت $x \in M$ كانت النقطة من اللصاقة وتم ذلك

أما في حالة $x \notin M$ أي أن : $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ومنه :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in N ; n \geq n_0 \to d(x_n, x) < \varepsilon$$

((أي أن كل جوار للنقطة x سوف يحوي نقاط من x_n مغايرة للنقطة x وعندها فإن x نقطة تراكم)) ⇐ بسبب وجود التقارب

وبالتالي فإن x نقطة ملاصقة حسب تعريف اللصاقة أي $x \in \bar{M}$. ويتم المطلوب

٢ً - الشرط اللازم والكافي كي تكون M مغلقة هو أنه إذا كانت x_n أي متتالية من عناصر M متقاربة من x فإن $x \in M$

الإثبات :

M مغلقة ⇔ إذا $x_n \in M \implies x_n \to x$ فإن $x \in M$

(⇐) نعلم أن إذا كانت M مغلقة فإن $M = \bar{M}$

Syria Math Team

نفرض أن M مجموعة مغلقة ولنأخذالمتتالية $\{x_n\}$ تسعى من x فإنه وحسب مبرهنة يكون $x \in \bar{M}$ ولأن M مغلقة فإنها تساوي لصاقتها $M = \bar{M}$ عندئذ $x \in M$

$(\Rightarrow)$ لنفرض الأن أن $\{x_n\}$ متقاربة من x أي أنه $x_n \to x \implies \forall x \in \overline{M}$

وحسب الفرض لدينا $x \in M \implies \bar{M} \subseteq M$

ولدينا عموماً أن $M \subseteq \bar{M}$ ومن الأحتوائين السابقين نجد أن $M = \bar{M}$ ومنه M مغلقة

يتم المطلوب.

تعريف الفضاء المتري التام :

ليكن (X, d) فضاء متري نقول عن x أنه فضاء تام إذا كانت كل المتتاليات الكوشية في هذا الفضاء متقاربة فيه ((أي وجد لها نهاية تنتمي إلى هذا الفضاء X))

تذكرة :

نقول عن متتالية $\{x_n\}$ في الفضاء المتري (X, d) أنها كوشية إذا تحققت :

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists n_0 \in N \; ; \; \forall n, m \geq n_0 \; ; d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

الأمثلة :

١ -إن R, R^n فضاءات تامة وذلك بخصوص المترك.((R المعرف في المترك هو : $((R, |.|))$))

٢ – وجدنا سابقا إن الفضاء Q يحوي متتالية كوشية ولكن ليست متقاربة فهو فضاء غير تام .

مبرهنة الفضاء الجزئي التام :

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الجزئي M من فضاء متري تام X فضاءاً متريا هو أن تكون المجموعة مغلقة M في X .

الإثبات :

M مغلقة $\Leftrightarrow$ M تامة

$(\Leftarrow)$ لنفرض أن M فضاءاً جزئياً تاماً ولنثبت أن M مغلقة أي نريد إثبات أن $M = \bar{M}$.

لنأخذ $x \in \overline{M}$ حيث x اختياري عندئذ حسب مبرهنة اللصاقة يوجد متتالية من عناصر $(x_n \in M)$ تسعى ل x أي $x_n \to x \implies x_n \in M$

Syria Math Team

إن $x \in X$ لأن X فضاءاً كلياً وإن تقارب المتتالية x_n يتم بخصوص الطبولوجيا المعرفة على X وكون X تام فإن x_n متتالية كوشية و إن خاصية الكوشية هذه تنطبق على M بخصوص نفس الطبولوجيا المعرفة

وبما أن M تاما ((فرضا)) فإن x_n متقاربة ولها نهاية في M وكذلك لها نهاية في X ولإن نهايتها وحيدة حسب تعريف التقارب فإن هذا التقارب يتم في M ويكون لدينا $x \in M \implies \bar{M} \subseteq M$

ومن الأحتوائين السابقين نجد أن $M = \bar{M}$ ومنه M مغلقة

⇒لنفرض أن M مغلقة ولنثبت أن M تامة .

((نأخذ متتالية كوشية من M ولنثبت أنها متقاربة كي يكون M تام))

لتكن لدينا x_n كوشية من Mوكون الفضاء X تاما فإن x_n متقاربة من $x \in X$

وليكن لدينا فرضاً Mمغلقة فهي تحوي على نقاط تجمعها عندئذ $x \in M$ وبالتالي تكون المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة في M وبالتالي وجدنا أنه أي كوشية في M هي متقاربة عندئذ M فضاءاً تام .

انتهت المحاضرة

قدرتك على حفظ اتزانك في الطوارئ ووسط الاضطرابات

وتجنب الذعر هي العلامات الحقيقية للقيادة

إعداد: بسمة نصر الله – تقى إسماعيل – رشا قرصة