الإثنين 22/10/2018

(11) و (12)

◀ دكتور المادة: محمد مناف الحمد

◀ عنوان المحاضرة: المعادلات التكاملية الخطية

نظري ☑

عملي ☐

معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني الخطية غير المتجانسة :

هي معادلة من الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x H(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt \quad \dots (1)$$

حل معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني باستخدام النواة الحالة :

▲ ملاحظة : معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول :

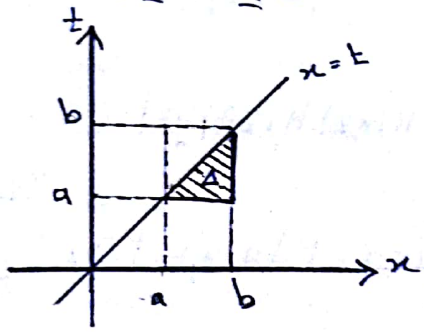
$$f(x) = \lambda \int_a^x H(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$$

▲ استنتاج صيغة الحل باستخدام النواة الحالة :

الدالة f مستمرة تربيعياً على المجال $[a,b]$

النواة H مستمرة على المنطقة المثلثية Δ ومحيطها في المستوي xot المعينة بالمتباينات (المتراجحات):

$$a \le x \le b \qquad a \le t \le x$$



سنقوم برد معادلة فولتيرا التكاملية إلى معادلة فريدهولم وذلك بتعريف نواة جديدة : بالشكل التالي :

$$\bar{H}(x,t) = \begin{cases} H(x,t) & : a \le t \le x \\ 0 & : x < t \le b \end{cases}$$

لنوجد النوى المكررة :

$$H_1(x,t) = H(x,t)$$

$$H_2(x,t)=\int_a^b H_1(x,Z)\cdot H_1(Z,t)\,dZ$$

نجزأ المجال :

$$H_2(x,t)=\int_a^t \underbrace{H_1(x,Z)\cdot H_1(Z,t)}_{0}\,dZ+\int_t^x H_1(x,Z)\,H_1(Z,t)\,dZ+\int_x^b \underbrace{H_1(x,Z)\cdot H_1(Z,t)}_{0}\,dZ$$

" حسب تعريف النواة الجديدة "   " حسب تعريف النواة الجديدة "

$$\Rightarrow H_2(x,t)=\int_t^x H_1(x,Z)\cdot H_1(Z,t)\,dZ$$

$$H_3(x,t)=\int_t^x H_1(x,Z)\cdot H_2(Z,t)\,dZ$$

$$\vdots$$

$$H_m(x,t)=\int_t^x H_1(x,Z)\cdot H_m(Z,t)\,dZ$$

بما أن المثلث Δ مغلق ومحدود فهو متراص ، H دالة مستمرة على Δ ومحيطه وكل مستمر على متراص سيكون محدود حسب مبرهنة (هاين بوريل) وبالتالي الدالة H محدودة على Δ.

$\Leftarrow$ أي يوجد c ثابت بحيث :

$$|H_1(x,t)|<c$$

$$|H_2(x,t)|=\left|\int_t^x H_1(x,Z)\cdot H_1(Z,t)\,dZ\right|$$

" حسب خواص القيمة المطلقة "

$$\le\int_t^x |H_1(x,Z)|\cdot|H_1(Z,t)|\,dZ<\int_t^x c\cdot c\,dZ=c^2\int_t^x dZ$$

$$=c^2\,[Z]_t^x=c^2(x-t)$$

$$|H_3(x,t)|=\left|\int_t^x H_1(x,Z)\cdot H_2(Z,t)\,dZ\right|\le\int_t^x |H_1(x,Z)|\,|H_2(Z,t)|\,dZ$$

$$\le\int_t^x c\cdot c^2\,(Z-t)\,dZ=c^3\int_t^x (Z-t)\,dZ$$

$$= c^3\left[\frac{z^2}{2} - tz\right]_t^x = c^3\left[\frac{x^2}{2} - xt - \underbrace{\frac{t^2}{2} + t^2}_{=\frac{t^2}{2}}\right]$$

$$= \frac{c^3}{2}\left[x^2 - 2xt + t^2\right] = \frac{c^3}{2}(x-t)^2$$

$$\Rightarrow H_3(x,t) \le \frac{c^3}{2!}(x-t)^2$$

$$\vdots$$

$$H_m(x,t) \le \frac{c^m}{(m-1)!}(x-t)^{m-1} \quad \dots (*)$$

نثبت صحة المتراجحة الأخيرة من أجل كل عدد صحيح موجب m باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي ، نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل m ولنثبت صحتها من أجل $m+1$:

$$|H_{m+1}(x,t)| \overset{?}{\le} \frac{c^{m+1}}{m!}(x-t)^m$$

$$|H_{m+1}(x,t)| \le \int_t^x |H_1(x,z)|\,|H_m(z,t)|\,.dz$$

$$\Rightarrow |H_{m+1}(x,t)| \le \int_t^x c\,.\frac{c^m}{(m-1)!}(z-t)^{m-1}.dz$$

$$= \frac{c^{m+1}}{(m-1)!}\int_t^x (z-t)^{m-1}.dz = \frac{c^{m+1}}{(m-1)!}\left[\frac{(z-t)^m}{m}\right]_t^x$$

$$= \frac{c^{m+1}}{m!}\left[(x-t)^m - 0\right] = \frac{c^{m+1}}{m!}(x-t)^m$$

نعلم أن متسلسلة النواة الحالة تعطى بالشكل:

$$R(x,t,\lambda) = H_1(x,t) + \lambda H_2(x,t) + \lambda^2 H_3(x,t) + \dots + \lambda^{m-1} H_m(x,t)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} H_m(x,t)$$

$$|\lambda^{m-1} H_m(x,t)| = |\lambda^{m-1}|.|H_m(x,t)|$$

$$\leq |\lambda^{m-1}|\left|\frac{c^m}{(m-1)!}(x-t)^{m-1}\right| = \frac{c}{(m-1)!}|c.\lambda(x-t)|^{m-1}$$

حسب (*)

$$\Rightarrow |\lambda^{m-1} H_m(x,t)| \leq \frac{c}{(m-1)!}|c.\lambda.(x-t)|^{m-1}$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

إن الطرف الأيمن للمتراجحة الأخيرة عبارة عن الحد العام لمتسلسلة أسية وهي متقاربة دوماً من أجل أي قيمة لـ λ.

هذا يعني أن المتسلسلة التي تمثل النواة الحالة متقاربة بانتظام في المثلث المغلق Δ وذلك أياً كانت λ.

إن النواة الحالة لمعادلة فولتيرا من النوع الثاني هي متسلسلة قوى لـ في λ وبالتالي مهما كانت λ والدالة h، يوجد حل وحيد لمعادلة فولتيرا ويعطى بالصيغة:

$$\varphi(x) = h(x) + \lambda\int_a^x R(x,t,\lambda)\, h(t).dt$$

تمرين عن حلول ص 151 رقم 10 (5):

أوجد حل المعادلة التكاملية التالية:

$$\varphi(t) - \int_0^t (t-u)\,\varphi(u).du = 1$$

$\boxed{\text{الحل}}$ المعادلة المفروضة تكتب بالشكل:

$$\varphi(t) = 1 + \int_0^t (t-u).\varphi(u).du$$

حيث: $a=0$ $\quad \lambda=1 \quad H(t,u)=(t-u) \quad h(t)=1$

لنوجد النوى المكررة: $H_1(t,u) = H(t,u) = t-u$

$$H_2(t,u) = \int_u^t H_1(t,u)\cdot H_1(x,u)\cdot dx$$

$$= \int_u^t (t-x)(x-u)\cdot dx$$

نجري تغيراً في المتحول من الشكل:

$$x-u = Z \Rightarrow x = Z+u$$

$$dx = dZ$$

حدود التكامل:

$$x_1 = u \rightarrow Z_1 = 0$$

$$x_2 = t \rightarrow Z_2 = t-u$$

بالتعويض نجد:

$$H_2(t,u) = \int_0^{t-u} (t-u-Z)Z\cdot dZ$$

$$= \int_0^{t-u} (t-u)Z\cdot dZ - \int_0^{t-u} Z^2\cdot dZ = (t-u)\int_0^{t-u} Z\cdot dZ - \int_0^{t-u} Z^2\cdot dZ$$

$$= (t-u)\left[\frac{Z^2}{2}\right]_0^{t-u} - \left[\frac{Z^3}{3}\right]_0^{t-u} = (t-u)\left[\frac{(t-u)^2}{2}-0\right] - \left[\frac{(t-u)^3}{3}-0\right]$$

$$= \frac{(t-u)^3}{2} - \frac{(t-u)^3}{3} = \frac{(t-u)^3}{6} = \frac{(t-u)^3}{3!}$$

$$\Rightarrow H_2(t,u) = \frac{(t-u)^3}{3!}$$

$$H_3(t,u) = \int_u^t H_1(t,u)\, H_2(x,u)\cdot dx = \int_u^t (t-x)\,\frac{1}{3!}(x-u)^3\cdot dx$$

$$= \frac{1}{3!}\int_u^t (t-x)\,(x-u)^3\cdot dx$$

نجري تغيراً في المتحول من الشكل:

$$x-u = Z \Rightarrow x = Z+u$$

$$dx = dz$$

حدود التكامل :

$$x_1 = u \Rightarrow z_1 = 0$$
$$x_2 = t \Rightarrow z_2 = t - u$$

بالتعويض نجد أن :

$$H_3(t,u) = \frac{1}{3!}\int_0^{t-u} (t-u-z)\, z^3 . dz$$

$$= \frac{1}{3!}\left[\int_0^{t-u} (t-u) z^3 . dz - \int_0^{t-u} z^4 . dz\right]$$

$$= \frac{1}{3!}\left[(t-u)\int_0^{t-u} z^3 . dz - \int_0^{t-u} z^4 . dz\right]$$

$$= \frac{1}{3!}\left[(t-u)\,\frac{(t-u)^4}{4} - \frac{(t-u)^5}{5}\right] = \frac{1}{3!}\left[\frac{(t-u)^5}{4} - \frac{(t-u)^5}{5}\right]$$

$$= \frac{5\,(t-u)^5}{5!} - \frac{4\,(t-u)^5}{5!} = \frac{(t-u)^5}{5!}$$

$$\Rightarrow H_3(t,u) = \frac{(t-u)^5}{5!}$$

$$\Rightarrow H_4(t,u) = \frac{(t-u)^7}{7!}$$

$$\vdots$$

$$(*) \ldots \quad H_m(t,u) = \frac{(t-u)^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

نفرض صحة العلاقة من أجل m ولنثبت صحتها من أجل m+1 :

$$H_{m+1}(t,u) \overset{?}{=} \frac{(t-u)^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

ننطلق من الطرف الأول:

$$H_{m+1}(t,u) = \int_u^t H_1(t,u) \cdot H_m(x,u) \cdot dx$$

$$= \int_u^t (t-x) \frac{(x-u)^{2m-1}}{(2m-1)!} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{(2m-1)!} \int_u^t (t-x)(x-u)^{2m-1} \cdot dx$$

نجري تغيراً للمتحول:

$$x - u = Z \Rightarrow x = Z + u$$

$$dx = dZ$$

$$x_1 = u \Rightarrow Z_1 = 0$$

$$x_2 = t \Rightarrow Z_2 = t - u$$

$$H_{m+1}(t,u) = \frac{1}{(2m-1)!} \int_0^{t-u} (t-u-Z) \cdot Z^{2m-1} \cdot dZ$$

$$= \frac{1}{(2m-1)!} \left[\int_0^{t-u} (t-u) Z^{2m-1} \cdot dZ - \int_0^{t-u} Z^{2m} \cdot dZ \right]$$

$$= \frac{1}{(2m-1)!} \left[(t-u) \left[\frac{(t-u)^{2m}}{2m} \right] - \left[\frac{(t-u)^{2m+1}}{2m+1} \right] \right]$$

$$= \frac{1}{(2m-1)!} \left[\frac{(t-u)^{2m+1}}{2m} - \frac{(t-u)^{2m+1}}{2m+1} \right]$$

$$= \frac{(2m+1)(t-u)^{2m+1} - 2m\,(t-u)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{(t-u)^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$R(t,u,\lambda) = H_1(t,u) + \lambda H_2(t,u) + \lambda^2 H_3(t,u) + \dots + \lambda^{m-1} H_m(t,u) + \dots$$

$$R(t,u,1) = (t-u) + \frac{(t-u)^3}{3!} + \frac{(t-u)^5}{5!} + \dots + \frac{(t-u)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots$$

$$R(t,u,1) = Sh(t-u)$$

$$\Rightarrow \psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda)\, h(t).dt$$

نبدل كل x بـ t وكل t بـ x :

$$\varphi(t) = h(t) + \lambda \int_a^t R(t,u,\lambda)\, h(u).du$$

$$\varphi(t) = 1 + \int_0^t Sh(t-u).du = 1 + [-Ch(t-u)]_0^t$$

$$= 1 + [-Ch(0) + Ch(t)] = 1 - 1 + Ch(t) = Ch(t)$$

تمرين: حل معادلة فولتيرا التكاملية التالية:

$$\varphi(t) = 5.4^t - \int_0^t 4^{t-u}\, \varphi(u).du$$

باستخدام النواة الحالة

الحل: المعادلة المفروضة من الشكل:

$$\varphi(t) = h(t) + \lambda \int_a^t H(t,u)\, \varphi(u).du$$

حيث:

$$h(t) = 5.4^t \quad , \quad \lambda = -1 \quad , \quad H(t,u) = 4^{t-u} \quad , \quad a = 0$$

وهي معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني

لنوجد النوى المكررة:

$$H_1(t,u) = H(t,u) = 4^{t-u}$$

$$H_2(t,u) = \int_u^t H_1(t,x).H_1(x,u)\, dx = \int_u^t 4^{t-x}\, 4^{x-u}.dx$$

$$= \int_u^t 4^{t-x+x-u}.dx = \int_u^t 4^{t-u}.dx = 4^{t-u}\int_u^t dx$$

$$= 4^{t-u}\,[x]_u^t = 4^{t-u}\,(t-u)$$

$$\Rightarrow \quad H_2(t,u) = (t-u)\, 4^{(t-u)}$$

$$H_3(t,u) = \int_u^t H_1(t,x).H_2(x,u)\,dx = \int_u^t 4^{t-x}.\ 4^{x-u}\ (x-u).dx$$

$$= 4^{t-u}\int_u^t (x-u).dx = 4^{t-u}\left[\frac{x^2}{2} - ux\right]_u^t$$

$$= 4^{t-u}\left[\frac{t^2}{2} - tu - \frac{u^2}{2} + u^2\right] = 4^{t-u}.\ \frac{1}{2}\left[t^2 - 2tu + u^2\right]$$

$$= 4^{t-u}\ \frac{(t-u)^2}{2}$$

$$\Rightarrow H_3(t,u) = 4^{t-u}\ \frac{(t-u)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$H_m(t,u) = 4^{t-u}\ \frac{(t-u)^{m-1}}{(m-1)!} \quad \dots (*)$$

لنثبت صحة العلاقة من أجل $m+1$:

$$H_m(t,u) = 4^{t-u}\ \frac{(t-u)^m}{m!}$$

لننطلق من الطرف الأول:

$$H_m(t,u) = \int_u^t H_1(t,x).H_m(x,u).dx = \int_u^t 4^{t-x}.4^{x-u}\ \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!}.dx$$

$$= \frac{4^{t-u}}{(m-1)!}\int_u^t (x-u)^{m-1}.dx = \frac{4^{t-u}}{(m-1)!}\left[\frac{(x-u)^m}{m}\right]_u^t$$

$$= \frac{4^{t-u}}{m!}\left((t-u)^m - 0\right) = \frac{4^{t-u}}{m!}(t-u)^m$$

$$R(t,\ ,\lambda) = H_1(t,u) + \lambda H_2(t,u) + \lambda^2 H_3(t,u) + \dots + \lambda^{m-1} H_m(t,u) + \dots$$

$$R(t,u,-1) = 4^{t-u} + (-1)\,4^{t-u}(t-u) + (-1)^2\frac{(t-u)^2}{2!}(t-u) + \dots + (-1)^m\frac{(t-u)^{m-1}}{(m-1)!} + \dots$$

$$= 4^{t-u}\Big[\underbrace{1-\frac{(t-u)}{1!}+\frac{(t-u)^2}{2!}-\frac{(t-u)^3}{3!}+\cdots}_{=e^{-(t-u)}}\Big]$$

$$= 4^{t-u}\, e^{-(t-u)}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = h(t) + \lambda\int_a^t R(t,u;\lambda)\,.\,h(u)\,.\,du$$

$$= 5.4^t - \int_0^t 4^{t-u}\, e^{-t+u}\,.\,(5.4^u)\,.\,du$$

$$= 5.4^t - 5.4^t\,.\,e^{-t}\int_0^t e^u\,.\,du$$

$$= 5.4^t - 5.4^t\,.\,e^{-t}\,[e^u]_0^t = 5.4^t - 5.4^t\,.\,e^{-t}\,[e^t-1]$$

$$= 5.4^t - 5.4^t + 5.4^t e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi(t) = 5.4^t e^{-t} = 5\left(\frac{4}{e}\right)^t}$$

تمرين : حل المعادلة التكاملية :

$$\psi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2}\,\psi(t)\,.dt$$

الحل : المعادلة المعروضة من الشكل :

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\int_a^x H(x,t)\,.\,\psi(t)\,.dt$$

$$h(x) = e^{x^2} \quad , \quad \lambda = 1 \quad , \quad H(x,t) = e^{x^2-t^2} \quad , \quad a = 0$$

لنوجد النوى المكررة :

$$H_1(x,t) = H(x,t) = e^{x^2-t^2}$$

$$H_2(x,t) = \int_t^x H_1(x,z)\,.\,H_1(z,t)\,.\,dz = \int_t^x e^{x^2-z^2}\,.\,e^{z^2-t^2}\,.\,dz$$

$$= \int_t^x e^{x^2-t^2}.dz = e^{x^2-t^2}\int_t^x .dz = e^{x^2-t^2}[z]_t^x$$

$$= e^{x^2-t^2}.(x-t)$$

$$\Rightarrow \quad H_2(x,t) = e^{x^2-t^2}.(x-t)$$

$$H_3(x,t) = \int_t^x H_1(x,z)H_2(z,t).dz = \int_t^x e^{x^2-z^2}e^{z^2-t^2}.(z-t).dz$$

$$= \int_t^x e^{x^2-t^2}(z-t).dz = e^{x^2-t^2}\int_t^x (z-t).dz$$

$$= e^{x^2-t^2}\left[\frac{z^2}{2} - tz\right]_t^x = e^{x^2-t^2}\left[\frac{x^2}{2} - tz - \frac{t^2}{2} + t^2\right]$$

$$= e^{x^2-t^2}\left[\frac{x^2}{2} - tz + \frac{t^2}{2}\right] = \frac{e^{x^2-t^2}}{2}\left[x^2 - 2tx + t^2\right].$$

$$\Rightarrow \quad H_3(x,t) = \frac{e^{x^2-t^2}}{2!}(x-t)^2$$

$$\vdots$$

$$H_m(x,t) = e^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \quad \dots (*)$$

نفرض أن العلاقة (*) محققة ولنثبت صحتها بالاستقراء الرياضي من أجل $m+1$:

$$H_{m+1}(x,t) = e^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^m}{m!}$$

لننطلق من الطرف الأول:

$$h_1 = H_{m+1}(x,t) = \int_t^x H_1(x,z).H_m(z,t).dz = \int_t^x e^{x^2-z^2}.e^{z^2-t^2}.\frac{(z-t)^{m-1}}{(m-1)!}.dz$$

$$= \frac{e^{x^2-t^2}}{(m-1)!}\int_t^x (z-t)^{m-1}.dz$$

$$= \frac{e^{x^2-t^2}}{(m-1)!}\left[\frac{(z-t)^m}{m}\right]_t^x = \frac{e^{x^2-t^2}}{m!}(x-t)^m = h_2$$

$$R(x,t,\lambda) = H(x,t) + \lambda H_2(x,t) + \lambda^2 H_3(x,t) + \dots + \lambda^{m-1} H_m(x,t) + \dots$$

$$R(x,t,1) = e^{x^2-t^2} + \frac{(x-t)}{1!} e^{x^2-t^2} + \frac{(x-t)^2}{2!} e^{x^2-t^2} + \dots + \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{x^2-t^2} + \dots$$

$$= e^{x^2-t^2} \underbrace{\left[\frac{(x-t)}{1!} + \frac{(x-t)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} + \dots \right]}$$

$$= e^{x^2-t^2} \, e^{x-t}$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda) \cdot f(t) \, dt$$

$$\psi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2} \cdot e^{x-t} \cdot e^{t^2} \, dt$$

$$= e^{x^2} + e^{x^2+x} \int_0^x e^{-t} \, dt = e^{x^2} + e^{x^2+x} \left[-e^{-t} \right]_0^x$$

$$= e^{x^2} + e^{x^2+x} \left[-e^{-x} + 1 \right] = e^{x^2} - e^{x^2} + e^{x^2+x} = e^{x^2+x}$$

$$\psi(x) = e^{x^2+x}$$

وهو المطلوب ...

تمرين: حل المعادلة التكاملية التالية:

$$\psi(x) = x - \frac{1}{2} \int_0^x x \cdot \psi(t) \, dt$$

المعادلة المفروضة من شكل:

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x H(x,t) \, \psi(t) \, dt$$

حيث:

$$f(x) = x \quad , \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad , \quad a = 0 \quad , \quad H(x,t) = x$$

وهي معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني

لنوجد النوى المكررة:

$$H_1(x,t) = H(x,t) = x$$

$$H_2(x,t) = \int_t^x H_1(x,z).H_1(z,t).dz$$

$$= \int_t^x x.z.dz = x\int_t^x z.dz = x\left[\frac{z^2}{2}\right]_t^x = x\left[\frac{x^2}{2} - \frac{t^2}{2}\right]$$

$$\Rightarrow H_2(x,t) = \frac{x}{1!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)$$

$$H_3(x,t) = \int_t^x H_1(x,z)\,H_2(z,t).dz$$

$$= \int_t^x x.z\left(\frac{z^2-t^2}{2}\right).dz = \frac{x}{2}\int_t^x z(z^2-t^2).dz$$

$$= \frac{x}{2^2}\int_t^x 2z(z^2-t^2).dz = \frac{x}{2^2}\left[\frac{(z^2-t^2)^2}{2}\right]_t^x$$

$$= \frac{x}{2.2^2}(x^2-t^2)^2 = \frac{x}{2!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow H_3(x,t) = \frac{x}{2!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow H_4(x,t) = \frac{x}{3!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$H_m(x,t) = \frac{x}{(m-1)!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^{m-1} \quad \ldots (*)$$

لنثبت صحة العلاقة * باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي: نفرض أنها صحيحة من أجل m

ونثبت صحتها من أجل $m+1$:

$$H_{m+1}(x,t) = \frac{x}{m!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^{m}$$

$$f_1 = H_{m+1}(x,t) = \int_t^x H_1(x,z).H_m(z,t)\,dz = \int_t^x x.\frac{x}{(m-1)!}\left(\frac{z^2-t^2}{2}\right)^{m-1}.dz$$

$$= \frac{x}{2.2^{m-1}(m-1)!}\int_t^x \underbrace{2z}_{H'}\underbrace{(z^2-t^2)}_{H}^{m-1}\,dz = \frac{x}{2^m(m-1)!}\left[\frac{(z^2-t^2)^m}{m}\right]_t^x$$

$$= \frac{x}{2^m.m!}\left[(x^2-t^2)^m - 0\right] = \frac{x}{m!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^m$$

$$R(x,t,\lambda) = H_1(x,t) + \lambda H_2(x,t) + \lambda^2 H_3(x,t) + \dots + \lambda^{m-1}H_m(x,t) + \dots$$

$$R(x,t,-\tfrac{1}{2}) = x + \frac{x}{1!}\left(\frac{-(x^2-t^2)}{4}\right) + \frac{x}{2!}\left(\frac{-(x^2-t^2)}{4}\right)^2$$

$$+ \dots + \frac{x}{(m+1)!}\left(\frac{-(x^2-t^2)}{4}\right)^{m+1} + \dots$$

$$= x\left[1 + \frac{\left(-\left(\frac{x^2-t^2}{4}\right)\right)}{1!} + \frac{\left(-\left(\frac{x^2-t^2}{4}\right)\right)^2}{2!} + \dots + \frac{\left(-\left(\frac{x^2-t^2}{4}\right)\right)^{m+1}}{(m+1)!} + \dots\right]$$

$$= x\,e^{-\left(\frac{x^2-t^2}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x R(x,t,\lambda)\,f(t)\,dt$$

$$= x - \frac{1}{2}\int_0^x x.e^{-\left(\frac{x^2-t^2}{4}\right)}.(t).dt$$

$$(1)\dots \quad \psi(x) = x - \frac{x\,e^{-\frac{x^2}{4}}}{2}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}.t.dt$$

نجري تغير للمتحول :

$$u = t^2 \Rightarrow du = 2t.dt \Rightarrow dt = \frac{1}{2t}du$$

نغير حدود التكامل :

$$t_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$$

$$t_2 = x \Rightarrow u_2 = x^2$$

$$\int_0^{x^2} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{4}} du = \frac{1}{2}\left[4 e^{\frac{u}{4}}\right]_0^{x^2} = 2\left[e^{\frac{x^2}{4}} - 1\right]$$

لنعوض في (1):

$$\psi(x) = x - \frac{x e^{-\frac{x^2}{4}}}{2}\left[2\left(e^{\frac{x^2}{4}} - 1\right)\right] = x - x + x e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = x e^{-\frac{x^2}{4}}}$$

تمرين: حل المعادلة التكاملية باستخدام النواة الحالة:

$$\psi(x) = \operatorname{ch} x + \int_0^x \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t} \cdot \psi(t)\, dt$$

الحل: المعادلة المفروضة من الشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^x H(x,t) \cdot \psi(t)\, dt$$

حيث:

$$h(x) = \operatorname{ch} x \ , \ \lambda = 1 \ , \ a = 0 \ , \ H(x,t) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}$$

لنوجد النوى المكررة:

$$H_1(x,t) = H(x,t) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}$$

$$H_2(x,t) = \int_t^x H_1(x,z) \cdot H_1(z,t)\, dz = \int_t^x \frac{\operatorname{ch} x}{\cancel{\operatorname{ch} z}} \cdot \frac{\cancel{\operatorname{ch} z}}{\operatorname{ch} t}\, dz$$

$$= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t} \int_t^x dz = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}\left[z\right]_t^x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t} \frac{(x-t)}{1!}$$

$$H_3(x,t) = \int_t^x H_1(x,z) \cdot H_2(z,t)\, dz = \int_t^x \frac{\operatorname{ch} x}{\cancel{\operatorname{ch} z}} \cdot \frac{\cancel{\operatorname{ch} z}}{\operatorname{ch} t} \cdot (z-t)\, dz$$

$$= \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\int_t^x (z-t)\,dz = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\left[\frac{(z-t)^2}{2}\right]_t^x$$

$$= \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\,\frac{(x-t)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$H_m(x,t) = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\cdot\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$H_{m+1}(x,t) = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\,\frac{(x-t)^m}{m!}$$

$$f_1 = H_{m+1}(x,t) = \int_t^x H_1(x,z)\,H_m(z,t)\,dz$$

$$= \int_t^x \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}z}\,\frac{\operatorname{ch}z}{\operatorname{ch}t}\,\frac{(z-t)^{m-1}}{(m-1)!}\,dz$$

$$= \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t\cdot(m-1)!}\int_t^x \underbrace{1}_{H'}\cdot\underbrace{(z-t)^{m-1}}_{H^r}\,dz$$

$$= \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t\cdot(m-1)!}\left[\frac{(z-t)^m}{m}\right]_t^x = \frac{\operatorname{ch}x\cdot(x-t)^m}{\operatorname{ch}t\cdot m!} = f_2$$

لنوجد النواة الحالة:

$$R(x,t,\lambda) = H_1(x,t) + \lambda H_2(x,t) + \lambda^2 H_3(x,t) + \dots + \lambda^{m-1} H_m(x,t) + \dots$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} H_m(x,t)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\,\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$= \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$= \frac{ch\,x}{ch\,t}\, e^{x-t}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda)\, h(t)\, dt$$

$$= ch\,x + \int_0^x \frac{ch\,x}{\cancel{ch\,t}}\, e^{x-t} \cdot \cancel{ch\,t}\, dt$$

$$= ch\,x + ch\,x\, e^{x} \int_0^x e^{-t}\, dt$$

$$= ch\,x + ch\,x\, e^{x} \left[-e^{-t}\right]_0^x = ch\,x - ch\,x\, e^{x} \left[e^{-t}\right]_0^x$$

$$= ch\,x - ch\,x\, e^{x} \left(e^{-x} - 1\right)$$

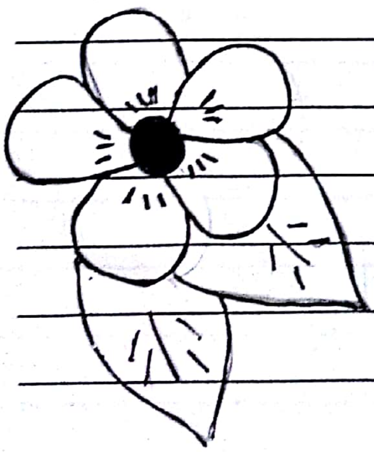
$$= ch\,x - ch\,x + e^{x} ch\,x = e^{x} ch\,x$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = e^{x} ch\,x}$$

وهو المطلوب...

انتهت المحاضرة...

إعداد: إيناس دليل



"لا تكتئب فلربما بعد اصفرار الزهر يأتيك الربيع ولا تخف فالله فوق سمائنا علام سميع"