(9) - (10)

الإثنين
15/10/2018

◀ دكتور المادة: محمد مناف الحمد

◀ عنوان المحاضرة: المعادلات التكاملية الخطية

نظري ☑
عملي ☐

تمارين :

(1)- أوجد حل المعادلة التكاملية باستخدام النواة المترددة :

((علماً أن جميع شروط النواة المترددة محققة))

$$\varphi(x) = \cos x + \lambda \int_0^{2\pi} [\sin x \cos t + \sin 2x \cos 2t + \sin 3x \cos 3t]\varphi(t).dt$$

المعادلة من الشكل :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t).\varphi(t).dt$$

وهي معادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني حيث :

$$f(x) = \cos x \qquad I = [a,b] = [0,\pi] \qquad \lambda = \text{ثابت}$$

$$k(x,t) = \sin x \cos t + \sin 2x \cos 2t + \sin 3x \cos 3t$$

نلاحظ أن المعادلة التكاملية تكتب بالشكل:
نواة

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{k=3} a_k(x)\, b_k(t) = a_1(x) b_1(t) + a_2(x) b_2(t) + a_3(x).b_3(t)$$

حيث أن :

$$a_1(x) = \sin x \qquad b_1(t) = \cos t$$

$$a_2(x) = \sin 2x \qquad b_2(t) = \cos 2t$$

$$a_3(x) = \sin 3x \qquad b_3(t) = \cos 3t$$

نعلم أن صيغة الحل باستخدام النواة المترددة تعطى بالشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{k=3} C_k\, a_k(x) \qquad (1)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda C_1 a_1(x) + \lambda C_2 a_2(x) + \lambda C_3 a_3(x)$$

$$\psi(x) = \cos x + \lambda c_1 \sin x + \lambda c_2 \sin 2x + \lambda c_3 \sin 3x$$

لتعيين الثوابت: c_1, c_2, c_3 نكتب جملة المعادلات الخطية عندها من الحل المشترك:

$$* \begin{cases} (1-\lambda a_{11})c_1 - \lambda a_{12} c_2 - \lambda a_{13} c_3 = h_1 \\ -\lambda a_{21} c_1 + (1-\lambda a_{22}) c_2 - \lambda a_{23} c_3 = h_2 \\ -\lambda a_{31} c_1 - \lambda a_{32} c_2 + (1-\lambda a_{33}) c_3 = h_3 \end{cases}$$

لنعين: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$

من الدراسة النظرية نعلم أن:

$$a_{km} = \int_a^b b_k(t) \cdot a_m(t) \cdot dt$$

$$a_{11} = \int_a^b b_1(t) \cdot a_1(t) \cdot dt = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos t)}_{H'} \underbrace{(\sin t)}_{H} \cdot dt$$

$$= \left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(0) = 0$$

$$\Rightarrow a_{11} = 0$$

$$a_{12} = \int_a^b b_1(t) \cdot a_2(t) \cdot dt = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin 2t \cdot dt = 0 \Rightarrow a_{12} = 0$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\sin 3t + \sin t) \cdot dt = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{3}\cos 3t\right]_0^{2\pi} + \left[-\cos t\right]_0^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{3}(\underbrace{\cos 6\pi}_{=1} - \underbrace{\cos 0}_{=1})\right) - (\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} - \underbrace{\cos 0}_{=1})\right) = 0$$

$$a_{13} = \int_a^b b_1(t) \cdot a_3(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin 3t\,dt = 0 \Rightarrow a_{13} = 0$$

$$a_{21} = \int_a^b b_2(t) \cdot a_1(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t \cdot \sin t\,dt = 0 \Rightarrow a_{21} = 0$$

$$a_{22} = \int_a^b b_2(t) \cdot a_2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t \cdot \sin 2t\,dt = 0 \Rightarrow a_{22} = 0$$

$$a_{23} = \int_a^b b_2(t) \cdot a_3(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t \cdot \sin 3t\,dt = 0 \Rightarrow a_{23} = 0$$

نجد أنّ:

$$a_{31} = 0 \qquad a_{32} = 0 \qquad a_{33} = 0$$

لنحسب h_1, h_2, h_3:

$$h_k = \int_a^b b_k(t) \cdot h(t)\,dt$$

$$h_1 = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t\,dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[[t]_0^{2\pi} + \underbrace{\left[\tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}}_{=0} \Big] = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}\pi) = \pi$$

$$\Rightarrow h_1 = \pi$$

$$h_2 = \int_a^b b_2(t) \cdot h(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t \cdot \cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 3t + \cos t)\,dt$$

$$\Rightarrow h_2 = 0$$

$$h_3 = \int_a^b b_3(t) \cdot h(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos 3t \cdot \cos t\,dt = 0 \Rightarrow h_3 = 0$$

نعوض في جملة المعادلات (*) كل ما حصلنا عليه :

فإننا نجد أن لجملة المعادلات حل وحيد وهو $C_2=C_3=0$ $C_1=\pi$

بالتعويض في صيغة الحل (1) نجد أن :

وبالتالي للمعادلة فريدهولم التكاملية حل وحيد وهو : $\Rightarrow$ $\psi(x)=\cos x+\lambda\pi\sin x$

وهو المطلوب ...

---

(2) - أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\psi(x)=\cot x+\lambda\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan t\cdot\psi(t)\,dt$$

المعادلة التكاملية تكتب بالشكل :

$$\psi(x)=h(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\cdot\psi(t)\,dt$$

وهي معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني غير المتجانسة

حيث :

$I=[a,b]=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ $\lambda=$ ثابت $h(x)=\cot x$

$K(x,t)=\tan t$

لنتحقق هل النواة متردية ؟؟

أولاً: نلاحظ أن النواة المعادلة التكاملية المفروضة تكتب بالشكل :

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{k=1}a_k(x)\cdot b_k(t)=a_1(x)\cdot b_1(t)$$

حيث :

$a_1(x)=1$ $b_1(t)=\tan t$

الدالة a_1 مستقلة خطياً " دالة واحدة "

الدالة b_1 مستقلة خطياً " دالة واحدة "

ثانياً: هل النواة كمولة تربيعياً ؟؟

$$1)-\int_a^b\int_a^b|K(x,t)|^2\,dx\,dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\,dx\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1.dx \right].dt = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 t - 1).dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 t).dt - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1.dt \right) = \frac{\pi}{2} \left([\tan t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - [t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left([1-(-1)] - \frac{\pi}{2} \right) = \pi - \frac{\pi^2}{4} = \frac{4\pi - \pi^2}{4} < \infty$$

2)- $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \, .dx = \frac{\pi}{2} \tan^2 t < \infty \quad \forall t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

3)- $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \, .dt = 2 - \frac{\pi}{2} < \infty \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

نستنتج مما سبق أن النواة $K(x,t)$ كمولة تربيعياً على المربع

$$D = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$$

ومنه $K(x,t)$ نواة المعادلة التكاملية المفروضة فتردية

وبالتالي صيغة الحل تعطى بالشكل :

$$\varphi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{k=1} c_k . a_k(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \cot x + \lambda c_1} \rightarrow$$ هي صيغة الحل

نوجد الثوابت c_1 نكتب المعادلات الخطية :

$$* \{ \ (1 - \lambda a_{11}) c_1 = h_1$$

نوجد a_{11} :

$$a_{11} = \int_a^b b_1(t).a_1(t).dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, .dt$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin t}{\cos t}.dt = -[\ln(|\cos t|)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -[\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$\Rightarrow a_{11} = 0$$

لنحسب h_1 :

$$h_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan t \cdot \cot t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1 \cdot dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\pi}{4}$$

ومن ثم لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية المفروضة حلاً وحيداً نعطى بالصيغة (1) بعد تعويض الثابت c_1

$$\psi(x) = \cot x + \lambda \frac{\pi}{2}$$

وهو المطلوب ..

---

(3) أوجد حل المعادلة التكاملية باستخدام النواة المترددة :

$$\psi(x) = \cos 2x + \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \cdot \psi(t) \, dt$$

الحل :

هي معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني غير المتجانسة من الشكل :

$$\psi(x) = h(x) + \int_a^b k(x,t) \cdot \psi(t) \, dt$$

حيث :

$$h(x) = \cos 2x \qquad I = [a,b] = [0,1] \qquad \lambda = 1$$

$$k(x,t) = \sin x \cos t$$

لنتحقق هل نواة المعادلة التكاملية مترددة ؟؟

نلاحظ أنه تكتب على شكل تركيب خطي بالشكل :

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{k=1} a_k(x) \cdot b_k(t) = a_1(x) \cdot b_1(t)$$

$$a_1(x) = \sin x \qquad b_1(t) = \sin t$$

أولاً : إثبات أن الدوال مستقلة خطياً :

الدالة a مستقلة خطياً (لأنها دالة واحدة)

الدالة b مستقلة خطياً (لأنها دالة واحدة)

ثانياً: إثبات أن $K(x,t)$ كمولة تربيعياً.

$\boxed{1}$ - $\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2.dx.dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin x.\cos t|^2.dx\,dt$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x.\cos^2 t\,.dx\,dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,.dt\right).dx$

$= \int_0^{2\pi} \sin^2 x \left(\frac{1}{2}\left([t]_0^{2\pi} + [\frac{1}{2}\sin 2t]_0^{2\pi}\right)\right).dx \qquad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$= \int_0^{2\pi} \sin^2 x \left(\frac{1}{2}\left[(2\pi - 0) + \frac{1}{2}[\underbrace{\sin 4\pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}]\right]\right).dx$

$= \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,(\pi).dx = \pi\int_0^{2\pi} \sin^2 x.dx$

$= \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2x).dx = \frac{\pi}{2}[x]_0^{2\pi} - \frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}\underbrace{[\sin 2x]_0^{2\pi}}_{0}$

$= \frac{\pi}{2}(2\pi - 0) = \pi^2 < \infty$

$\boxed{2}$ - $\int_0^{2\pi} \sin^2 x.\cos^2 t.dx = \cos^2 t\int_0^{2\pi} \sin^2 x.dx = \pi\cos^2 t < \infty$

$\forall t \in [0,2\pi]$

$\boxed{3}$ - $\int_0^{2\pi} \sin^2 x.\cos^2 t.dt = \sin^2 x\int_0^{2\pi} \cos^2 t.dt = \pi\sin^2 x < \infty$

$\forall x \in [0,2\pi]$

وبالتالي $k(x,t)$ كمولة تربيعياً على المربع D

$D = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$

وبالتالي $k(x,t)$ نواة مترددة.

$$\varphi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{k=1} c_k \cdot a_k(x)$$

$$\varphi(x) = h(x) + \lambda c_1 a_1(x) = \cos 2x + c_1 a_1(x)$$

$$a_1(x) = \sin x \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \cos 2x + c_1 \sin x}$$

لنحسب c_1 من المعادلات:

$$* \ \{(1-\lambda a_{11})c_1 = h_1$$

$$a_{11} = \int_0^{2\pi} b_1(t) \cdot a_1(t) \cdot dt = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin t \cdot dt = 0$$

$$h_1 = \int_0^{2\pi} b_1(t) \cdot h(t) \cdot dt = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos 2t \, dt = 0$$

أي المعادلة * حل وحيدة وبالعودة للصيغة (1) يكون الحل الوحيد للمعادلة التكاملية المعطاة هو:

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0} \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \cos 2x}$$

---

(4) - أوجد حل المعادلة التكاملية باستخدام النواة المتردية:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} |x| \cdot \varphi(t) \cdot dt$$

وهي معادلة فريدهولم التكاملية الخطية المتجانسة من النوع الثاني تكتب بالشكل:

$$\varphi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot \varphi(t) \cdot dt$$

حيث أن:

$$h(x) = 0 \qquad \lambda = \text{ثابت} \qquad I = [-1, 1] \qquad k(x,t) = |x|$$

لنتحقق هل النواة متردية ؟؟

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{k=1} a_k(x) \cdot b_k(t) = a_1(x) b_1(t)$$

حيث:

$$a_1(x) = |x| \quad , \quad b_1(t) = 1$$

أولاً: إن الدالة a_1 مستقلة خطياً ((لأنها دالة واحدة))

إن الدالة b_1 مستقلة خطياً ((لأنها دالة واحدة))

ثانياً: لنتحقق هل نواة المعادلة التكاملية مكمولة تربيعياً ؟؟

$$1) - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |k(x,t)|^2 . dx . dt = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |x|^2 . dx . dt = \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} . dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) . dt = \int_{-1}^{1} \frac{2}{3} . dt = \frac{2}{3}\left[t\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} < \infty$$

$$2) - \int_{-1}^{1} |x|^2 . dx = \frac{2}{3} < \infty \quad \forall t \in [-1,1]$$

$$3) - \int_{-1}^{1} |x|^2 . dt = 2x^2 < \infty \quad \forall t \in [-1,1]$$

ومنه k مكمولة تربيعياً على المربع $D = [-1,1] \times [-1,1]$

$\Leftarrow$ نواة المعادلة التكاملية منحلة .

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{k=1} c_k a_k(x) = c_1 a_1(x) = c_1 |x|$$

نوجد c_1 :

$$(1 - \lambda a_{11}) c_1 = 0$$

$$a_{11} = \int_a^b b_1(t) . a_1(t) . dt = \int_{-1}^{1} |t| . dt = \int_{-1}^{0} -t . dt + \int_0^1 t . dt$$

$$= \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda) c_1 = 0$$

$$** \{ (1-\lambda).C_1 = 0$$

إما: $1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$$0 C_1 = 0$$

"وبالتالي يوجد عدد غير منتهي من الحلول للمعادلة ** وعليه يكون للمعادلة المفروضة عدد غير منتهي من الحلول"

نفرض $C_1 = A$ (ثابت كيفي) ونعوضه في صيغة الحل:

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = A(x)}$$

أو: $C_1 = 0$ "يوجد حل وحيد وهو الحل الصفري للمعادلة التكاملية المفروضة"

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = 0}$$

أوجد حل المعادلة التكاملية باستخدام النواة المتردية:

$$\psi(x) = \sin 2x + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi}\sin x \sin t + t\right)\psi(t).dt$$

نلاحظ أن المعادلة التكاملية من الشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t).\psi(t)\,dt$$

بحيث: $h(x) = \sin 2x$ $\lambda = 1$ $I = [-\pi, \pi]$

$$k(x,t) = \frac{1}{\pi}\sin x \sin t + t$$

لنتحقق هل نواة المعادلة التكاملية متردية؟؟

نلاحظ أنها تكتب على شكل تركيب خطي:

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{k=2} a_k(x).b_k(t) = a_1(x)b_1(t) + a_2(x)b_2(t)$$

$$a_1(x) = \frac{1}{\pi}\sin x \qquad b_1(t) = \sin t$$

$$a_2(x) = 1 \qquad b_2(t) = t$$

أولاً:

← هل الدالتين a_1, a_2 مستقلتين خطياً؟ لنوجد معين رونسكي:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ a_1'(x) & a_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\pi}\sin x & 1 \\ \frac{1}{\pi}\cos x & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\pi}\cos x \neq 0$$

ومنه الدالتين a_1, a_2 مستقلتين خطياً على المجال $[-\pi, \pi]$

← هل الدالتين b_1, b_2 مستقلتين خطياً؟ لنوجد معين رونسكي:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1(t) & b_2(t) \\ b_1'(t) & b_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin t & t \\ \cos t & 1 \end{vmatrix} = \sin t - t\cos t \neq 0$$

ومنه الدالتين b_1, b_2 مستقلتين خطياً على المجال $[-\pi, \pi]$

ثانياً: لنرى إن كانت النواة كمولة تربيعياً على المربع D

1) - $$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2 . dx\, dt = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{\pi}\sin x . \sin t + t\right|^2 . dx . dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi^2}\sin^2 x \sin^2 t + \frac{2}{\pi} t \sin x \sin t + t^2\right) . dx . dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\pi^2}\sin^2 t \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x . dx}_{=\pi} + \frac{2}{\pi} t \sin t \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin x . dx}_{=0} + t^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx}_{=2\pi}\right] . dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\sin^2 t + 2\pi t^2\right) . dt = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t . dt}_{=\pi} + 2\pi\int_{-\pi}^{\pi} t^2 . dt$$

$$= 1 + 2\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 1 + \frac{2\pi}{3}\left[\pi^3 + \pi^3\right] = 1 + \frac{4\pi^4}{3} < \infty$$

$$\int_a^b |k(x,t)|^2 . dx = \frac{1}{\pi}\sin^2 t + 2\pi t^2 < \infty \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

$$\int_a^b |k(x,t)|^2 . dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi^2}\sin^2 x \sin^2 t + \frac{2}{\pi} t \sin x . \sin t + t^2\right) . dt$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sin^2 x \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \, dt}_{I} + \frac{2}{\pi}\sin x \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t \sin t \, dt}_{II} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt}_{= \frac{2\pi^3}{3}} \quad (*)$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \, dt$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2t \, dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left([t]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left([\pi-(-\pi)] - \frac{1}{2}(0)\right) = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$

$$II = \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t \, dt$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = t \qquad du = 1 \, dt$$

$$v = -\cos t \qquad dv = \sin t \, dt$$

$$II = [-t\cos t]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\cos t$$

تذكرة: "قانون التكامل بالتجزئة"

$$I = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \, du$$

$$= -[\pi\cos\pi - (-\pi\cos(-\pi))] + [\sin t]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -[\pi(-1) - (-\pi(-1))] + [\underbrace{\sin\pi - \sin(-\pi)}_{=0}]$$

$$= -[-\pi - \pi] = 2\pi$$

نعوض في $(*)$:

$$= \frac{1}{\pi^2}\sin^2 x\,(\pi) + \frac{2}{\pi}\sin x\,(2\pi) + \frac{2\pi^3}{3} < \infty \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

وبالتالي نواة المعادلة التكاملية مكمولة تربيعياً على المربع D

$\Leftarrow$ ومنه نواة المعادلة التكاملية متردية.

صيغة الحل تعطى بالشكل :

$$\varphi(x) = h(x) + \sum_{k=1}^{k=2} c_k a_k(x)$$

$$\varphi(x) = h(x) + c_1 a_1(x) + c_2 a_2(x)$$

$$\varphi(x) = \sin 2x + \frac{c_1}{\pi}\sin x + c_2 \quad \ldots (1$$

$$\star \begin{cases} (1-\lambda a_{11})c_1 - \lambda a_{12}c_2 = h_1 \\ -\lambda a_{21}c_1 + (1-\lambda a_{22})c_2 = h_2 \end{cases}$$

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} b_1(t).a_1(t).dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \left(\frac{1}{\pi}\sin t\right).dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t .dt = \frac{1}{\pi}(\pi) = 1 \Rightarrow a_{11} = 1$$

$$a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} b_1(t).a_2(t).dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\,(1).dt = 0 \Rightarrow a_{12} = 0$$

$$a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} b_2(t).a_1(t).dt = \int_{-\pi}^{\pi} t\left(\frac{1}{\pi}\sin t\right).dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t.\sin t.dt$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}(2\cancel{\pi}) = 2 \Rightarrow a_{21} = 2$$

$$a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} b_2(t).a_2(t).dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1.t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}[\pi^2-\pi^2] = 0$$

$$\Rightarrow a_{22} = 0$$

$$h_k = \int_a^b b_k(t).h(t).dt$$

$$h_1 = \int_{-\pi}^{\pi} b_1(t).h(t).dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\,(\sin 2t).dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos 3t - \cos t].dt$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\left[\frac{1}{3}\sin 3t\right]_{-\pi}^{\pi} - [\sin t]_{-\pi}^{\pi} \right] = 0 \Rightarrow h_1 = 0$$

$$h_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t.\sin 2t.dt = -\pi \qquad \Rightarrow h_2 = -\pi$$

نعوض في جملة المعادلات (*)

$$0c_1 - 0c_2 = 0 \quad \Rightarrow 0c_2 = 0$$

$$-2c_1 + c_2 = -\pi$$

لها عدد غير منتهي من الحلول نفرض $c_1 = A$ ثابت كيفي

$$c_2 = 2c_1 - \pi = 2A - \pi$$

$$c_1 = A \qquad c_2 = 2A - \pi$$

نعوض في صيغة الحل (1):

$$\boxed{\varphi(x) = \sin 2x + \frac{A}{\pi}\sin x + 2A - \pi}$$ حيث: A كيفي

وبالتالي لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني عدد غير منتهي من الحلول

بين أنه ليس للمعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) = h(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+t).\varphi(t).dt$$

أي حل عندما: $h(x) = x$

ولها عدد غير منتهي من الحلول عندما: $h(x) = 1$

$$\varphi(x) = h(x) + \lambda\int_a^b K(x,t).\varphi(t).dt$$

حيث: $K(x,t) = \sin(x+t)$ $\quad I = [0,2\pi]$ $\quad \lambda = \frac{1}{\pi}$

$$\sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t$$

نلاحظ أن نواة المعادلة التكاملية تكتب بالشكل:

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{k=2} a_k(x)\, b_k(t) = a_1(x).b_1(t) + a_2(x)\, b_2(t)$$

حيث:

$a_1(x) = \sin x \qquad b_1(t) = \cos t$

$a_2(x) = \cos x \qquad b_2(t) = \sin t$

لنرى فيما إذا كانت النواة مترددة.

① الشرط الأول: لنرى أن كانت الدوال a_1 , a_2 دوال مستقلة خطياً على المجال $[0,2\pi]$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ a_1'(x) & a_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

وبالتالي a_1 , a_2 مستقلتين خطياً على المجال $[0,2\pi]$

لنرى إن كانت الدوال b_1 , b_2 دوال مستقلة خطياً أم لا على المجال $[0,2\pi]$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1(t) & b_2(t) \\ b_1'(t) & b_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0$$

وبالتالي الدوال b_1 , b_2 مستقلة خطياً على المجال $[0,2\pi]$

② الشرط الثاني: إثبات أن النواة $K(x,t)$ كمولة تربيعياً

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2.dx.dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(x+t).dx.dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \sin^2(x+t).dx\right].dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2(x+t)).dx\right].dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[[x]_0^{2\pi} - \underbrace{\left[\tfrac{1}{2}\sin 2(x+t)\right]_0^{2\pi}}_{0}\right].dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2\pi - 0).dt = \frac{1}{2}\,2\pi\int_0^{2\pi} dt = 2\pi^2 < \infty$$

$$\int_a^b |K(x,t)|^2 \cdot dx = \int_0^{2\pi} |\sin(x+t)|^2 \cdot dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x+t) \cdot dx = \pi < \infty$$

$$\forall t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_a^b |K(x,t)|^2 \cdot dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(x+t) \cdot dt = \pi < \infty \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

ومنه $K(x,t)$ نواة المعادلة التكاملية كمولة تربيعياً

$\Leftarrow$ ومنه نستنتج أن نواة المعادلة التكاملية المفروضة منتظمة.

نكتب صيغة الحل:

$$\varphi(x) = h(x) + \sum_{k=1}^{k=2} c_k a_k(x)$$

نوجد C_1, C_2 من جملة المعادلات:

$$* \quad \dots \quad (1 - \lambda a_{11}) c_1 - \lambda a_{12} c_2 = h_1$$

$$** \quad \dots \quad -\lambda a_{21} c_1 + (1 - \lambda) a_{22} c_2 = h_2$$

لنوجد:

$$a_{11} = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin t \cdot dt = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

$$a_{12} = \int_0^{2\pi} \cos t \cos t \cdot dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot dt = \pi \Rightarrow a_{12} = \pi$$

$$a_{21} = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sin t \cdot dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot dt = \pi \Rightarrow a_{21} = \pi$$

$$a_{22} = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \cos t \cdot dt = 0 \Rightarrow a_{22} = 0$$

نعوض في جملة المعادلات:

$$c_1 - \pi \lambda c_2 = h_1 \quad *$$

$$-\pi \lambda c_1 + c_2 = h_2 \quad **$$

نأخذ محدد الأمثال:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\pi\lambda \\ -\pi\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \pi^2 \lambda^2 = (1 - \pi\lambda)(1 + \lambda\pi)$$

$$\Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow (1 - \pi\lambda)(1 + \pi\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi} \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$$

النظام للمعادلة المفروضة طبقاً وهي عبارة عن قيمة ذاتية (مميزة) للنواة $K(x,t)$ وبالتالي حسب مبرهنة فريدهولم فإن للمعادلة التكاملية المفروضة إما عدد غير منتهي من الحلول أو مستحيلة الحل وذلك تبعاً لشروط التعامد إن تحققت أم لا :

$$\int_0^{2\pi} \varphi^m(t).h(t).dt = 0$$

φ^m تشكل قاعدة لفضاء الحل للمعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة لمنقول المعادلة التكاملية المفروضة أي تشكل قاعدة لفضاء الحل للمعادلة : $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(t+x)\, \varphi(t).dt$

نلاحظ أن نواة منقول المعادلة التكاملية المفروضة تساوي تماماً لنواة المعادلة التكاملية المفروضة (من تحقق الخاصية التناظرية) $K(x,t) = K(t,x) = \sin(x+t)$.

إن القيم الذاتية للنواة $K(x,t)$ تساوي القيم الذاتية للنواة $K(t,x)$

بالعودة للجملة المعادلات $*$ و $**$ وبتعويض $\lambda = \frac{1}{\pi}$ وأخذنا المتجانسة نجد :

$$c_1 - c_2 = 0 \quad .. *'$$

$$-c_1 + c_2 = 0 \quad ... **'$$

ومنه نجد أن : $c_1 = c_2$ ، وبالتالي فضاء الحل للجملة $*'$ و $**'$ هو :

$$E_{\frac{1}{\pi}} = \{(c_1, c_2) \; ; c_1 = c_2\} = \{(c_1, c_1)\} = \{\rho(1,1)\}$$

حيث : $c_1 = \rho$ وسيط

نلاحظ أنه لدينا وسيط واحد وبالتالي بُعد فضاء الحل لجملة المعادلتين الخطيتين $*' . **'$ يساوي الواحد ، وعليه يكون بُعد فضاء الحل للمعادلة التكاملية المنقولة (2) الناتجة عن المعادلة التكاملية المتجانسة للمعادلة المفروضة هو الواحد ، أي أن $m=1$

وعليه لدينا شرط تعامد واحد هو :

$$\int_0^{2\pi} \varphi'(t).h(t).dt = 0 \quad ...(3)$$

نعلم أن الحلول الخاصة لمنقول المعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة للمعادلة المفروضة هي :

$$\varphi^{(m)}(x) = \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k^m \, b_k(x) \qquad m = 1, 2, \dots p$$

لكن : $c_1' = c_1 = \rho \qquad c_2' = c_1 = \rho \qquad p = 1 \qquad n = 2$

$b_1(x) = \cos x \qquad b_2(x) = \sin x$

$R = \frac{1}{\pi}$ ، ومنه لدينا حل خاص وحيد لمعقول المعادلة التكاملية الموافقة للمعادلة المعروضة

بالشكل: $\varphi'(x) = \frac{\rho}{\pi}(\cos x + \sin x)$

نبدل كل x بـ t فنجد:

$$\varphi'(t) = \frac{\rho}{\pi}(\cos t + \sin t) \quad \dots (4)$$

الآن نعوض في شرط التعامد (3) فنجد:

$$(3) \dots \int_0^{2\pi} \varphi'(t).h(t).dt = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\pi}(\cos t + \sin t)h(t).dt = 0$$

بالتقسيم على $\frac{\rho}{\pi}$ حيث $\rho \neq 0$:

$$(I) \quad \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t).h(t).dt = 0 \Leftarrow \text{شرط التعامد}$$

الآن لنناقش الحالات المعروضة للدالة h:

1- إذا كانت $h(x) = x$ فإن شرط التعامد يصبح

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t).t.dt = \int_0^{2\pi} t.\cos t.dt + \int_0^{2\pi} t.\sin t.dt$$

لنحسب التكاملين السابقين (بالتجزئة):

$\int_0^{2\pi} t.\sin t.dt$

نفرض: $u = t \qquad du = 1.dt$

$v = -\cos t.dt \qquad dv = \sin t.dt$

$$\int_0^{2\pi} t.\sin t.dt = [-t\cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\cos t.dt$$
$$= -[2\pi\cos 2\pi] + [\sin t]_0^{2\pi}$$
$$= -2\pi(1) = -2\pi$$

$\int_0^{2\pi} t.\cos t.dt$

$u = t \qquad du = 1.dt$

$v = \sin t \qquad dv = \cos t.dt$

$$\int_0^{2\pi} t.\cos t.dt = [t.\sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t.dt$$
$$= [2\pi\sin 2\pi] - [-\cos t]_0^{2\pi}$$
$$= 0 + [0] = 0$$

ومنه: $\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)t.dt = -2\pi \neq 0$

أي شرط التعامد غير محقق وبالتالي ليس للمعادلة المعروضة حل عندما $h(x) = x$

2- إذا كانت $h(x) = 1$ وبالتالي يصبح الشرط:

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)h(t).dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t).dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos t.dt + \int_0^{2\pi} \sin t.dt = 0$$

ومنه شرط التعامد محقق أي يوجد للمعادلة المعروضة عدد غير منته من الحلول

في حالة $h(x)=1$ استناداً لمبرهنة فريدهولم.

لتعيين هذه الحلول، نوجد h_1, h_2:

$$h_1=\int_a^b b_1(t).h(t).dt=\int_0^{2\pi}\cos t(1).dt=\int_0^{2\pi}\cos t.dt=0$$

$$h_2=\int_a^b b_2(t).h(t).dt=\int_0^{2\pi}\sin t.(1).dt=\int_0^{2\pi}\sin t.dt=0$$

نعوض في الجملة $*$ ، $**$ علماً أنّ $\lambda=\frac{1}{\pi}$ فنجد:

$$\begin{aligned} * \quad & c_1-\pi\lambda c_2=h_1 \\ ** \quad & -\pi\lambda c_1+c_2=h_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & c_1-c_2=0 \\ & -c_1+c_2=0 \end{aligned} \Rightarrow c_1=c_2$$

ومنه بتعويض الثوابت في الصيغة (1) نحصل على حل المعادلة المفروضة:

$$(1) \ldots \quad \varphi(x)=h(x)+\lambda c_1 a_1(x)+\lambda c_2 a_2(x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=1+\frac{c_1}{\pi}(\sin x+\cos x)=1+A(\sin x+\cos x)$$

حيث: $A=\frac{c_1}{\pi}$ (ثابت).

وهو المطلوب...

برهن أن التابع المعطى يحقق المعادلة التكاملية حوطاً لها:

$$\varphi(x)+2\int_0^1 e^{x-t}\varphi(t).dt=2xe^x \quad : \quad \varphi(x)=e^x\left(2x-\frac{2}{3}\right)$$

لنكتب المعادلة التكاملية المفروضة بالشكل:

$$\varphi(x)=2xe^x-2\int_0^1 e^{x-t}.\varphi(t).dt$$

المعادلة المفروضة هي من الشكل:

$$\varphi(x)=h(x)+\lambda\int_a^b k(x,t).\varphi(t).dt$$

حيث: $k(x,t)=e^{x-t}$ ، $I=[0,1]$ ، $\lambda=-2$ ، $h(x)=2xe^x$

وهي معادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني.

نلاحظ أنّ نواة المعادلة التكاملية المفروضة تكتب بالشكل:

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{k=1} a_k(x)\, b_k(t) = a_1(x).b_1(t)$$

بحيث:

$$a_1(x) = e^x \qquad b_1(t) = e^{-t}$$

a_1 دالة مستقلة خطياً (لأنها دالة واحدة) على المجال $[0,1]$

b_1 دالة مستقلة خطياً (لأنها دالة واحدة) على المجال $[0,1]$

الآن لنتحقق إن كانت النواة k كمولة تربيعياً على المربع $D=[0,1]\times[0,1]$

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2.dx.dt = \int_0^1\int_0^1 |e^{x-t}|^2.dx.dt$$

$$\int_0^1\int_0^1 e^{2(x-t)}.dx.dt = \int_0^1\int_0^1 e^{2x-2t}.dx.dt = \int_0^1\int_0^1 e^{2x}.e^{-2t}.dx.dt$$

$$= \int_0^1 e^{-2t}\Big[\underbrace{\int_0^1 e^{2x}.dx}_{I}\Big].dt$$

لنحسب I:

$$\int_0^1 e^{2x}.dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{2}[e^2-1] = \frac{e^2-1}{2}$$

$$= \int_0^1 e^{-2t}\Big[\frac{e^2-1}{2}\Big].dt$$

$$= \frac{e^2-1}{2}\underbrace{\int_0^1 e^{-2t}.dt}_{II}$$

لنحسب II:

$$\int_0^1 e^{-2t}.dt = \Big[-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}[e^{-2}-e^0] = -\frac{1}{2}[e^{-2}-1] = \frac{1-e^{-2}}{2}$$

$$= \frac{e^2-1}{2}\Big[\frac{1-e^{-2}}{2}\Big]$$

$$= \frac{1}{4}(e^2-1)(1-e^{-2}) < \infty$$

$$\int_0^1 |k(x,t)|^2 .dx = \int_0^1 e^{2(x-t)} .dx = e^{-2t} \int_0^1 e^{2x} .dx = e^{-2t} \left(\frac{e^2-1}{2}\right)$$

$$= \frac{(e^2-1)e^{-2t}}{2} < \infty \quad ; \forall t \in [0,1]$$

$$\int_0^1 |k(x,t)|^2 .dt = \int_0^1 e^{2(x-t)} .dt = e^{2x} \int_0^1 e^{-2t} .dt = e^{2x} \left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)$$

$$= \frac{(1-e^{-2})e^{2x}}{2} < \infty \quad \forall x \in [0,1]$$

مما سبق نجد أن النواة $k(x,t)$ كمولة تربيعياً على المربع D وبالتالي النواة $k(x,t)$ مترددة.

وبالتالي صيغة الحل تعطى بالشكل:

$$\varphi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{k=1} c_k a_k(x) = h(x) + \lambda c_1 a_1(x)$$

$$= 2xe^x + (-2)(e^x) c_1$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = 2xe^x - 2e^x c_1 \quad \dots (1)$$

لنعين الثابت c_1:

$$(1 - \lambda a_{11}) c_1 = h_1 \quad \dots (*)$$

لكن: $a_{11} = \int_a^b b_1(t).a_1(t).dt = \int_0^1 e^{-t}.e^t.dt = \int_0^1 1.dt$

$$= [t]_0^1 = 1 \quad \Rightarrow a_{11} = 1$$

$$h_1 = \int_a^b b_1(t).h(t).dt = \int_0^1 e^{-t}(2te^t).dt = \int_0^1 2t.dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow h_1 = 1$$

بالتعويض في $(*)$ نجد:

$$(1-(-2)1) c_1 = 1 \Rightarrow (1+2) c_1 = 1 \Rightarrow 3c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}$$

بالتعويض في صيغة الحل ١) نجد أنّ:

$$\psi(x) = 2xe^{x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)e^{x}$$

$$= 2xe^{x} - \frac{2}{3}e^{x}$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x) = e^{x}\left(2x - \frac{2}{3}\right)$$

وهو المطلوب ..

انتهت المحاضرة.

إعداد: إيناس دليل

يهبك الله الفرح، حتى وأنت تعتقد
أنك فقدته للأبد، يعيده الله لك،
يزرعه فيك رغماً عنك، بلا إرادتك
...