◄ دكتور المادة: وائل أبو ريشة

◄ المحاضرة: الخامسة ◄ عنوان المحاضرة: المستوي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تعريف المستوي
٢ـ معادلات المستوي في الفراغ
٣ـ ايجاد معادلة المستوي

تعريف المستوي : أنه سطح غير محدود اذا اشترك معه مستقيم بأكثر من نقطة انطبق عليه في جميع أوضاعه .

معادلات المستوي في الفراغ: تعطى معادلة المستوي P في الفراغ بالشكل:

$$P \equiv ax + by + cz = 0$$

يسمى الشعاع $\vec{n} = (a, b, c)$ ناظم المستوي P وهو شعاع عامودي على كل مستقيم يقع داخل هذا المستوي ($\vec{n}$ شعاع عامودي على منحه كل مستقيم يقع داخل المستوي)

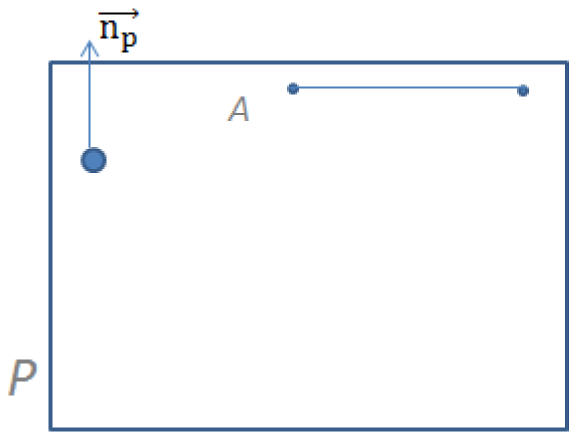
ـلإيجاد معادلات المستوي لها ثلاثة حالات:

الحالة الاولى: اذا علم ناظم $\vec{n}$ ونقطة معلومة منه يوجد معادلة للمستوي P نفرض نقطة كيفية ولتكن $M(x, y, z) \in P$ تنتمي الى هذا المستوي

فتعطى معادلة المستوي P بالعلاقة :

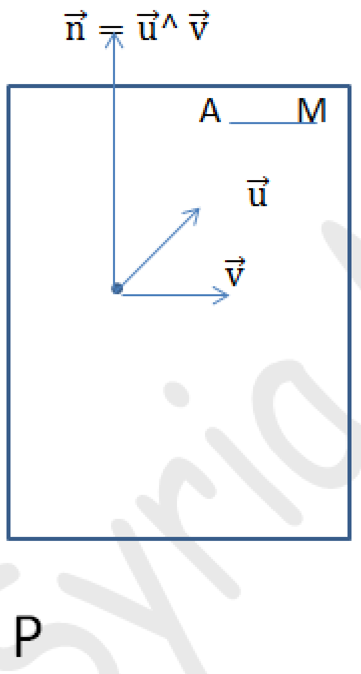
$\vec{n_p} \perp \overrightarrow{AM} \rightarrow$

$P = \vec{n_p} * \overrightarrow{AM} = 0$



الحالة الثانية: *اذا علمت شعاعان $\vec{u},\vec{v}$ متوازيان في المستوي P غير مرتبطان خطيان ويمر بنقطة معلومة*

نفرض $M(x,y,z)\in P$ *نقطة كيفية فأن ناظم* $\overrightarrow{n_p}$ *هو الجداء الخارجي للشعاعين*



$$\overrightarrow{n_p}=\vec{u}\wedge\vec{v}$$

فأن معادلة المستوي هي:

$$P=\overrightarrow{n_p}*\overrightarrow{AM}=0$$

و هو أيضا جداء مختلط

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\ \wedge\vec{v}).\vec{w}$$

$$=(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM})$$

اذا: $(\overrightarrow{AM},\vec{v},\vec{u})=0$

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{AM}\\ \vec{u}\\ \vec{v}\end{vmatrix}=0$$ جداء مختلط

ونستطيع ايجاده من العلاقة الوسيطية:

$P=X=A+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ علاقة وسيطية

$\lambda,\mu\in R$; أعداد حقيقية.

المعادلات الوسيطية للمستوي :

$$x=x_A+\lambda x_{\vec{u}}+\mu x_{\vec{v}}$$

$$y=y_A+\lambda y_{\vec{u}}+\mu y_{\vec{v}}$$

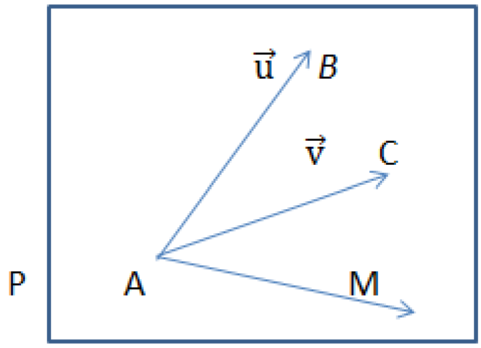
$$z=z_A+\lambda z_{\vec{u}}+\mu\, z_{\vec{v}}$$

الحالة الثالثة : اذا علم منه ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة A,B,C:

نفرض نقطة كيفية تنتمي للمستوي $M(x,y,z)\in P$ فأن معادلة المستوي هو الجداء المختلط

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$$

$$(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$$



$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{vmatrix} = 0$$

مثال:

أوجد معادلة المستوي الموازي للشعاعين :

$\vec{v}(2,3,4)$, $\vec{u}(1,1,1)$ مار من النقطة $A(1,0,1)$

الحل

$$\overrightarrow{n_p} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{n_p}(1,-2,1)$$

لنوجد معادلة المستوي

نعوض $M(x,y,z) \in P$

$$\overrightarrow{AM} = (x-1, y, z-1)$$

معادلة المستوي $P := \overrightarrow{n_p} * \overrightarrow{AM} = 0$

$$x - 1 - 2y + z - 1 = 0$$

$x - 2y + z - 2 = 0$ وهي المعادلة الديكارتية للمستوي

طلب اضافي للإيجاد معادلة الوسيطية للمستوي P.

الحل

معادلات الوسيطية للمستوي:

$$P:\begin{cases} x = x_A + \lambda x_{\vec{u}} + \mu x_{\vec{v}} \\ y = y_A + \lambda y_{\vec{u}} + \mu y_{\vec{v}} \\ z = z_A + \lambda z_{\vec{u}} + \mu z_{\vec{v}} \end{cases}$$

نعوض النقطة $A(1,0,1)$ في المعادلات الوسيطية للمستوي

$$P:\begin{cases} x = 1 + 1\lambda + 2\mu \dots\dots\dots (1) \\ y = 0 + 1\lambda + 3\mu \dots\dots\dots . (2) \\ z = 1 + 1\lambda + 4\mu \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

من المعادلة (١) نجد $\lambda = x - 1 - 2\mu$ نعوض في المعادلة(٢)فنجد:

$$y = 0 + x - 1 + \mu$$

اذا $\mu = y + 1 - x \dots\dots *$

نعوض μ بـλ:

$$\lambda = ء - 1 - 2(y - x + 1)$$

$$\lambda = 3x - 2y - 3\dots\dots\dots **$$

نعوض*و**ب(٣): $z = 1 + (3x - 2y - 3) + 4(y - x + 1)$

$$z = -x + 2y + 2$$

$$z + x - 2y - 2 = 0$$

٢-)اكتب معادلة الديكارتيةللمستوي Pمعادلاته الوسيطية:

$$x = \lambda + \mu\dots\dots(1)$$

$$y = \lambda - \mu \dots\dots\dots (2)$$

$$z = 6 + 6\lambda + 4\mu \dots\dots\dots . (3)$$

الحل

بجمع(١)و(٢) نجد : $x + y = 2\lambda \implies \lambda = \frac{x+y}{2}$

نعوض λ في (٢) فنجد:

$$y = \frac{x + y}{2} - \mu \implies \mu = \frac{x - y}{2}$$

نعوض λ وµ في (٣)

$$z = 6 + 6\left(\frac{x+y}{2}\right) + 4\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$z = 6 + 5x + y$$

$$z - 5x - y - 6 = 0$$

٣)-أكتب معادلة المستوي المار بالنقاط التالية : B(1,1,1) وِ A(0,0,1) وC(1,9,3)

الحل

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1,1,0) \quad ,\vec{u} = \overrightarrow{AC} = (1,9,2)$$

نفرض نقطة كيفية $\overrightarrow{AM}(x,y,z-1) : M(x,y,z) \in P$

$$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AM},\vec{v},\vec{u}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

معادلة المستوي $2x - 2y + 8z - 8 = 0$

٤)-أكتب معادلة المستوي المار بالنقطة *A(1,2,3)* ويعامد المتجه $\vec{n}(2,-1,0)$

الحل

نفرض نقطة كيفية تنتمي الى المستوي *P*. $M(x,y,z) \in P$

$$\overrightarrow{AM}(x-1, y-2, z-3)$$

$$P = \overrightarrow{n_p} * \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\left(2\vec{i} - \vec{j} + 0\vec{k}\right) * \left((x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}\right) = 0$$

$$(2)(x-1) + (-1)(y-2) + 0 = 0$$

$$2x - 2 - y + 2 + 0 = 0$$

$2x - y = 0$ وهي معادلة المستوي

5- اكتب معادلة المستوي المارة بالنقطتين *B(1,0,1)* و *A(1,1,0)* ويوازي المتجه $\vec{v}(1,-1,1)$

الحل

$\vec{v}(1,-1,1)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(0,-1,1)$ نفرض نقطة كيفية $M(x,y,z)\in P$ في المستوي $\overrightarrow{AM}(x-1,y-1,z)$

$$\overrightarrow{n_p}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-1+1)\vec{i}-(0-1)\vec{j}+(0+1)\vec{k}$$

$$=0\vec{i}+1\vec{j}+1\vec{k}$$

$$\overrightarrow{n_p}(0,1,1)$$

$$P=\overrightarrow{n_p}*\overrightarrow{AM}=0$$

$$\left(0\vec{i}+1\vec{j}+1\vec{k}\right)*\left((x-1)\vec{i}+(y-1)\vec{j}+z\vec{k}\right)=0$$

$$0+y-1+z=0$$

$y+z-1=0$ معادلة المستوي

*طريقة ثانية :**

ويمكن حلها بالجداء المختلط $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM},\vec{v}\right)=0$

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(-1+1)-(y-1)(0-1)+z(0+1)=0$$

$$0+y-1+z=0$$

$y+z-1=0$ وهي معادلة المستوي

الزاوية بين المستويين: ***ليكن*** لدينا P_2 وP_1 مستويان معطيان بالمعادلة:

$$P_1=a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$P_2=a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

نعرف الزاوية بين المستويان P_1 و P_2 بأنهما الزاوية بين $\overrightarrow{N_{P_1}}$ و $\overrightarrow{N_{P_2}}$ اذا كانت مقدار الزاوية المحصورة بين $\frac{\Pi}{2} \leq \Theta \leq 0$ تكون

$$\cos\Theta = \left|\frac{\overrightarrow{N_{P_1}} * \overrightarrow{N_{P_2}}}{\left\|\overrightarrow{N_{P_1}}\right\| * \left\|\overrightarrow{N_{P_2}}\right\|}\right|$$

أذا كان P_2 و P_1 مستويان متوازيان :

فأن: $\overrightarrow{N_{P_1}} \ // \ \overrightarrow{N_{P_2}} \ \rightarrow \Theta = 0$

فأن الناظمين $\overrightarrow{N_{P_2}}$ و $\overrightarrow{N_{P_1}}$ مرتبطان خطيان وهو ان ينتج أحدهما عن الآخر بطربه بعدد $\overrightarrow{N_{P_1}} = \lambda\overrightarrow{N_{P_2}}$; $\lambda \in R$

$$\lambda = \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

P_2 و P_1 مستويان متعامدان :

فأن $\overrightarrow{N_{P_1}} \perp \overrightarrow{N_{P_2}} \ \rightarrow \ \Theta = \frac{\Pi}{2}$

نأخذ جدائهما الداخلي لانهما غير مرتبطان خطيان $\overrightarrow{N_{P_1}} * \overrightarrow{N_{P_2}} = 0$

تمارين:

عين الزاوية بين المستويين P_1, P_2 كل من الحالات الأتية :

$$P_1 = x - y + 3z - 1 = 0$$

$$P_2 = 2x - y - z = 0$$

الحل

$\overrightarrow{N_{P_1}}(1,-1,3)$ ، $\overrightarrow{N_{P_2}}(2,-1,-1)$

$$\overrightarrow{N_{P_1}} * \overrightarrow{N_{P_2}} = 2 + 1 - 3 = 0$$

$$\cos\Theta \ \rightarrow \Theta = \frac{3\Pi}{2}$$

$$P_2 = x - 3y - z + 5 = 0$$

$$P_2 = 2x - 6y - 2y = 0$$

الحل

$\overrightarrow{N_{P_2}}(2,-6,-2)$, $\overrightarrow{N_{P_1}}(1,-3,-1)$

$\overrightarrow{N_{P_2}} = 2\overrightarrow{N_{P_1}}$ مرتبطان خطيا متوازيان فأن الزاوية $\theta = 0$*

$$P_1 = x + y + 2z = 0$$

$$P_2 = y + z = 0$$

الحل

$\overrightarrow{N_{P_2}}(0,1,1)$ و $\overrightarrow{N_{P_1}}(1,1,2)$:

$\overrightarrow{N_{P_1}} * \overrightarrow{N_{P_2}} = 0 + 1 + 2 = 3 \neq 0$ اذا هما غير متوازيان

$$\left\|\overrightarrow{N_{P_1}}\right\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\left\|\overrightarrow{N_{P_2}}\right\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{2}*\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \theta = \frac{\Pi}{6}$$

تمارين:

أوجد معادلة المستوي المار من نقطة $A(1,-2,-1)$ وموازيان للمستوي

$$P = 2x - y + 3z + 4 = 0$$

الحل

نفرض نقطة كيفية $M(x,y,z) \in P$ وناظم المستوي $\overrightarrow{N_P}(2,-1,3)$

$$\overrightarrow{AM}(x-1, y+2, z+1)$$

$$P \coloneqq \overrightarrow{N_P} * \overrightarrow{AM} = 0$$

$$(2\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k}) * \left((x-1)\vec{i} + (y+2)\vec{j} + (z+1)\vec{k}\right) = 0$$

$$(2)(x-1) + (-1)(y+2) + (3)(z+1) = 0$$

$$2x - 2 - y - 2 + 3z + 3 = 0$$

$2x - y + 3z - 1 = 0$ وهي معادلة المستوي

أوجد معادلة المستوي P المار من نقاط A(1,1,1) ومعادلة المستوي

$$P_1 = 3x - y + 2z + 4 = 0$$

$$P_2 = x + 2y - z + 5 = 0$$

الحل

بما أن P يعامد P_1 **ويعامد** P_2 **فان** $\overrightarrow{N_P}$ **يعامد** $\overrightarrow{N_{P_1}}$ **و** $\overrightarrow{N_{P_2}}$ $\overrightarrow{N_{P_2}}(1,2,-1)$,

$\overrightarrow{N_{P_2}}(1,2,-1)$, $\overrightarrow{N_{P_1}}(3,-1,2)$

$$\overrightarrow{N_P} = \overrightarrow{N_{P_1}} \wedge \overrightarrow{N_{P_2}} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{I} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{J} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{K}$$

$$= (1-4)\vec{I} - (-3-2)\vec{J} + (6+1)\vec{K}$$

$$-3\vec{I} + 5\vec{J} + 7\vec{K}$$

$$\overrightarrow{N_P}(-3,5,7) \qquad P := \overrightarrow{N_P} * \overrightarrow{AM} = 0$$

نفرض نقطة كيفية $M(x,y,z) \in P$ **:** $\overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z-1)$

$$P := \overrightarrow{N_P} * \overrightarrow{AM} = 0$$

$$(-3\vec{I} + 5\vec{J} + 7\vec{K}) * \left((x-1)\vec{I} + (y-1)\vec{J} + (z-1)\vec{K}\right) = 0$$

$$(-3)(x-1) + 5(y-1) + 7(z-1) = 0$$

$$-3x + 3 + 5y - 5 + 7z - 7 = 0$$

$$-3x + 5y + 7z - 9 = 0$$

وظيفة

لتكن $A(x_A, y_A, z_A) \in R^3$ نقطة في الفراغ أثبت أن

$$\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_3 = 2$$

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ الزوايا المحصورة بين المستقيم OA ومحاور الاحداثيات .

تتحرك نقطة في الفراغ بحيث يكون بعدها عن OY يساوي ثلاثة أمثال بعدها عن OZ أوجد معادلة المحل الهندسي بهذه النقطة.

انتهت المحاضرة

إعداد : رغد السويد* مؤمنة أندورا *رزان عثمان

تنسيق: محمد أنس القزاز