12+11

◄ دكتور المادة: محمد بشير قابيل

◄ عنوان المحاضرة:

نظري ☑
عملي ☐

لنتذكر معاً تعريف المرشحة :

لتكن $X \neq \phi$ ، $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ ، نقول إن $\mathcal{F}$ مرشحة في X إذا تحقق ما يلي :

1 : $X \in \mathcal{F}$, $\phi \notin X$

2 إذا كانت $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq D$ فإن $D \in \mathcal{F}$

3 من أجل A, B فإن $A \cap B \in \mathcal{F}, A \cup B \in \mathcal{F}$

وتكون المرشحة $\mathcal{F}$ أعظمية إذا تحقق الشرط : $\forall D \subseteq X \Rightarrow D \in \mathcal{F}$ or $D^c \in \mathcal{F}$

وهذا التعريف للمرشحة الأعظمية يكافئ : أن كل مرشحة أكبر من $\mathcal{F}$ تساويها

مثال 1 : $X = \{1,2,3\}$ و $\mathcal{F} = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$

مثال 2 : (X, τ) ، $\mathcal{F}_x$ جوارات النقطة x مرشحة على X تدعى مرشحة جوار النقطة

أي إذا كان (X, τ) فضاء تبولوجي و $x \in X$ و مجموعة جوارات x :

$\mathcal{V}_x = \{V : x \in V^\circ$ « V جوار لـ x » $\}$

$= \{V : \exists O \in \tau : x \in O \subseteq V\}$

إن $\mathcal{V}_x$ مرشحة على X

تنويه : مرشحة جوارات نقطة ليس بالضرورة أن تكون أعظمية ،
لنأخذ مثلاً $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ومرشحة جوارات الصفر $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathbb{R}$
إن $\mathcal{V}_0$ ليست مرشحة أعظمية وذلك بسبب ما يلي :

$\mathbb{N} \in \tau_0$ و $\mathbb{N}^c \in \tau_0$

مبرهنة ((التراص بلغة المرشحات الأعظمية)):

كل مرشحة أعظمية في فضاء متراص متقاربة ((سنبرهن ذلك))
كما أن العكس صحيح.

★ قبل أن نشرع بالبرهان سنذكر بأهم المفاهيم التي ذكرناها:

تقارب مرشحة: نقول عن مرشحة f أنها متقاربة من x في الفضاء التبولوجي (X,τ) إذا $\tau_x \subseteq f$

المجموعة المتراصة: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي و $M \subseteq X$ نقول إن M متراصة إذا حوت كل تغطية مفتوحة لـ M تغطية جزئية منتهية لـ M

التغطية: نقول عن الجماعة $\{A_i : i \in I\}$ أنها تغطية لـ M إذا
$$M \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$
وإذا كانت A_i مفتوحات، قلنا إن $\{A_i\}$ تغطية مفتوحة لـ M

- الآن سنبدأ بالبرهان:

لنفرض (X,τ) فضاء متراص ولنثبت أن كل مرشحة أعظمية متقاربة
لتكن f مرشحة أعظمية ولنفرض مؤقتاً أنه لا يوجد $x \in X$ بحيث تكون f متقاربة من x، أي

$$\forall x \in X ; \tau_x \nsubseteq f \Leftrightarrow \forall x \in X ; \exists w_x \in \tau_x : w_x \notin f$$
مفتوحة

- إن $\{w_x\}_{x \in X}$ تكون تغطية مفتوحة لـ X ذلك لأن $X = \bigcup_{x \in X} w_x$

ولما كان X متراصاً فإنه يوجد $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ بحيث
$$X = \underbrace{w_{x_1}}_{\notin f} \cup \underbrace{w_{x_2}}_{\notin f} \cup \dots \cup \underbrace{w_{x_n}}_{\notin f}$$

ولما كانت $w_{x_i} \notin f$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$ و f أعظمية عندئذ

$w_{x_i}^c \in f \quad , \forall i=1,2,\dots,n$

وأن f مغلقة للتقاطع تعريفاً :

$$\Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} w_{x_i}^c \in f$$

وحسب دومورغان :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} w_{x_i}\right)^c \in f \Longleftrightarrow X^c \in f \Longleftrightarrow \phi \in f$$

وهذا خلاف

$\Leftarrow$ f متقاربة .

تمرين :

أثبت أن الصورة المباشرة وفق تطبيق غامر لمرشحة أعظمية هي مرشحة أعظمية .

$h : X \xrightarrow{\text{غامر}} Y$

$h(h^{-1}(D)) = D \Longleftrightarrow$ غامر h

$\forall D \subseteq Y$

الحل: لتكن $X \neq \phi$, $Y \neq \phi$ و

لتكن f مرشحة في X و

$f_1 = h(f) = \{h(A) \; ; \; A \in f\}$

لنثبت أن f_1 مرشحة في Y

[1] لما كان h غامراً فإن $h(X) = Y \Rightarrow Y \in f_1$

وأن كل $A \in f$ فإن $A \neq \phi$

بالتالي $h(A) \neq \phi \Rightarrow \phi \notin f_1$

[2] ليكن $A, B \in f$ عندئذ

$$h(A) \cup h(B) = h(\underbrace{A \cup B}_{\in f}) \in f_1$$

$$h(A) \cap h(B) \supseteq h(A \cap B) \in f_1$$

ولكن إذا كان $A \in f_1$ و $A \subseteq D$

فإن $D \in f_1$ « مبرهن في $\boxed{3}$ »

$\Longleftarrow h(A) \cap h(B) \in f_1$

$\boxed{3}$ لما كانت f مرشحة على X فإن

$$\forall A \in f \ , \ A \subseteq B \subseteq X \Longrightarrow B \in f$$

لكن $A \in f$, ليكن $D \subseteq Y$ حيث $h(A) \subseteq D$

$h^{-1}(h(A)) \subseteq A$

$$\Longrightarrow A \subseteq h^{-1}(D) = B \in f$$

$$\Longrightarrow h(B) \in f_1$$

$$\Longrightarrow h(A) \subseteq h(B) = D$$

حيث $h(B) = h(h^{-1}(D)) = D$

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~

الفصل الثالث

الفصل في الفضاءات التبولوجية

separation in topological spaces.

A - الفضاءات T_0 و T_1 و T_2

تعريف (1) : يقال عن فضاء تبولوجي إنه فضاء T_0 (أو إنه فضاء من النمط T_0 ، أو إنه فضاء كولموغورف Kolmogoroff إذا تحقق :

$$\forall x, y \in X \ , \ x \neq y$$

فيوجد جوار U_x لـ x لا يحوي y

أو جوار U_y لـ y لا يحوي x

مبرهنة (1): الشرط اللازم والكافي كي يكون (X,τ) فضاءً تبولوجياً T_0 هو التالي:

$$\forall x,y \in X \,,\, x \neq y$$

إما ألّا تكون x ملاصقة لـ $\{y\}$ وإما ألّا تكون y نقطة ملاصقة لـ $\{x\}$

نتيجة: الشرط اللازم والكافي كي يكون (X,τ) فضاءً تبولوجياً T_0 هو التالي:

أياً كانت $x,y \in X$ و $x \neq y$ فإما $x \notin \overline{\{y\}}$ وإما $y \notin \overline{\{x\}}$

مثال: ليكن (X,d) فضاءً شبه متري، ولتكن x ، y نقطتان مختلفتين منه بحيث $d(x,y)=0$ من الواضح أن أي مجموعة مفتوحة حاوية لـ x لابد أن تحوي y وأن أي مجموعة مفتوحة حاوية لـ y لابد أن تحوي x. إذاً فالفضاءات شبه المترية لا تنتمي عموماً إلى صف الفضاءات التبولوجية T_0

مبرهنة (2): إذا كان (X,τ) ، (Y,τ') فضائين تبولوجيين هوميومورفيين، وكان (X,τ) فضاءً T_0 فإن (Y,τ') هو فضاء T_0.

- إن كل فضاء جزئي من فضاء تبولوجي T_0 هو فضاءً T_0 كذلك.
- الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جداء جماعة منتهية من الفضاءات التبولوجية فضاءً T_0 هو أن يكون كل فضاء من الجماعة فضاءً T_0

تعريف (2): يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء T_1 (أو إنه فضاء من النمط T_1 أو إنه فضاء شبه Fréchet) إذا تحقق:

$$\forall x,y \in X \,,\, x \neq y$$

يوجد جوار U_x لـ x لا يحوي y وجوار U_y لـ y لا يحوي x

يترتب على هذا التعريف وعلى تعريف الفضاء T_0 أن كل فضاء T_1 هو فضاء T_0 في حين أن العكس غير صحيح عموماً.

مبرهنة (3): الشرط اللازم والكافي كي يكون (X, τ) فضاءً تبولوجياً T_1 هو أن تكون كل مجموعة جزئية وحيدة العنصر مغلقة.

نتيجة: الشرط اللازم والكافي كي يكون (X, τ) فضاءً تبولوجياً T_1 هو أن يكون $\overline{\{x\}} = \{x\}$ أياً كان $x \in X$

مبرهنة (4):

- إذا كان (X, τ)، (Y, τ') فضائين تبولوجيين متشاكلين (هوميومورفيين)، وكان (X, τ) فضاءً T_1 فإن (Y, τ') هو فضاءً T_1
- إن كل فضاء جزئي من فضاءٍ تبولوجي T_1 هو فضاءً T_1 كذلك.
- الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاءً جداء جماعةٍ منتهيةٍ من الفضاءات التبولوجية فضاءً T_1 هو أن يكون كل فضاءٍ من الجماعة هو فضاءً T_1

تعريف (3): يقال عن فضاء تبولوجي (X, τ) إنه فضاء T_2 (أو فضاء من النمط T_2، أو إنه فضاء هاوسدورف Hausdorff) إذا تحقق:

$$\forall x, y \in X,\quad x \neq y$$

يوجد جوار U_x لـ x وجوار U_y لـ y بحيث يكون $U_x \cap U_y = \phi$

- يترتب على هذا التعريف أن كل فضاء T_2 هو فضاء T_1 (ومن ثم فضاء T_0) في حين أن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

كما يبين المثال التالي:

مثال (4): لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية، ولنرمز بـ τ لاجتماع المجموعة $\{\phi\}$ ومجموعة كل المجموعات الجزئية من $\mathbb{N}$ التي كل منها مؤلف من جميع عناصر $\mathbb{N}$ باستثناء عدد منته منها. إن τ تكون تبولوجيا على $\mathbb{N}$ ولما كانت مجموعة وحيدة العنصر من $\mathbb{N}$ متممة لأعداد عناصر τ فإنها مجموعة مغلقة ومن ثم فإن $(\mathbb{N},\tau)$ هو فضاء T_1.
ولكن إذا كان x,y عنصرين مختلفين من $\mathbb{N}$ فإن أي جوار لـ x يتقاطع مع أي جوار لـ y ومن ثم فهو ليس فضاء T_2.

مبرهنة (5):
- إذا كان (X,τ)، (Y,τ') فضائين تبولوجيين متشاكلين (هوميومورفيين) وكان (X,τ) فضاء T_2 فإن (Y,τ') هو فضاء T_2 كذلك.
- إن كل فضاء جزئي من فضاء تبولوجي T_2 هو فضاء T_2 كذلك.
- الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاءُ جداءِ جماعةٍ منتهيةٍ من الفضاءات التبولوجية فضاء T_2 هو أن يكون كلُّ فضاءٍ من الجماعة هو فضاءً T_2

☆ ☆ ☆

تعريف: يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء T_3 إذا تحقق الشرط:
أياً كانت المجموعة المغلقة F من X وأياً كانت النقطة x من X الخارجة عن F، فيوجد جوار U_x لـ x، وجوار U_F لـ F بحيث يكون $U_x \cap U_F = \phi$.
(يقصد بجوار مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي أي مجموعة مفتوحة تحويها)

- نقول عن الفضاء (X,τ) إنها فضاء منتظم إذا كان فضاء T_3 و T_1 في آن واحد.

مثال (1): إن أي فضاء متري هو فضاء تبولوجي T_3، بل وهو فضاء منظم كذلك

- تجدر الإشارة إلى أن كون الفضاء فضاء T_3 لا يترتب عليه أن يكون فضاء T_2 بالضرورة،
وكذلك لا يترتب على كون الفضاء فضاء T_2: أن يكون فضاء T_3

مثال (2): ليكن (X,τ) فضاءً تاماً يحوي أكثر من نقطة. إن هذا الفضاء هو فضاء T_3.

البرهان:

لنفترض مؤقتاً أن (X,τ) ليس فضاء T_3، عندئذ توجد مجموعة مغلقة F ونقطة x خارجة عن F بحيث أنه أياً كان الجواران U_F و U_x لـ F و x على الترتيب، فإن $U_x \cap U_F \neq \phi$.
ولما كانت المجموعتان المغلقتان الوحيدتان في (X,τ) هما ϕ، X فمن السهل الملاحظة بأن هذا الأمر لا يمكن أن يتم، وهذا يعني أن كل فضاء تافه هو فضاء T_3، إلا أن هذا الفضاء ليس فضاء T_2 ذلك أياً كانت النقطتان المختلفتان فيه، فإن لكليهما جواراً واحداً هو X ومن ثم لا يمكن أن نجد لهما جوارين منفصلين.

مبرهنة (1): الشرط اللازم والكافي كي يكون (X,τ) فضاءً تبولوجياً T_3 هو التالي:
أياً كانت النقطة x من X وأياً كان الجوار U لـ x، فيوجد جوار V لـ x لصاقته محتواة في U،
أي $\overline{V} \subseteq U$

مبرهنة (2):

- إذا كان (X,τ) , (Y,τ') فضائين تبولوجيين هوميومورفيين وكان (X,τ) فضاء T_3 (منتظماً)، فإن (Y,τ') فضاء T_3 (منتظم).
- كل فضاء جزئي من [redacted] فضاء تبولوجي T_3 (منتظم) هو فضاء T_3 (منتظم) كذلك
- الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جداء جماعة منتهية من الفضاءات التبولوجية فضاء T_3 (منتظماً) هو أن يكون كل فضاء من الجماعة هو فضاء T_3 (منتظم)

تعريف: يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء $T_{3\frac{1}{2}}$ أو أنه فضاء منتظم تماماً completely regular space

أو إنه فضاء تيخونوف إذا كان فضاء T_1 وتحقق إضافة إلى ذلك الشرط التالي: أياً كانت المجموعة الجزئية F غير الخالية والمغلقة في (X,τ) وأياً كانت النقطة x من X الخارجة عن X، فيوجد تطبيق مستمر f للفضاء (X,τ) في الفضاء $[0,1]$ (المزودة بتبولوجيا القيمة المطلقة) بحيث يكون $f(F)=\{1\}$ و $f(x)=0$

مبرهنة:

- إن كل فضاء منتظم تماماً هو فضاء منتظم
- إن كل فضاء ناظمي هو فضاء منتظم تماماً
- إن كل فضاء جزئي من فضاء منتظم تماماً هو فضاء منتظم تماماً

ملاحظة: كل فضاء منتظم تماماً لا بد أن يكون فضاء هاوسدورف.

- في الحقيقة إذا (X,τ) فضاء منتظماً تماماً فإنه فضاء T_1 ومن ثم فكل مجموعة وحيدة العنصر فيه تكون مغلقة.

لنأخذ $x, y \in X$ بحيث إذاً نجد استناداً إلى تعريف الفضاء المنتظم تماماً أن ثمة تطبيقاً مستمراً f للفضاء X في الفضاء $[0,1]$ بحيث يكون $f(x)=0 \ , \ f(y)=1$

نلاحظ أن المجموعتين $\{z : \frac{1}{2} < f(z) \leq 1\}$ ، $\{z : 0 \leq f(z) < \frac{1}{2}\}$ منفصلتان ومفتوحتان في (X,τ) وتحويان على الترتيب النقطتين x, y ومن ثم فإن (X,τ) هو فضاء هاوسدورف.

☆ ☆ ☆

الفضاءات T_4 والفضاءات الناظمية (السوية)

تعريف: يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه T_4 إذا تحقق الشرط التالي:

أياً كانت المجموعتان المغلقتان والمنفصلتان F, F' في X، فيوجد جوار U_F لـ F وجوار $U_{F'}$ لـ F' بحيث يكون $U_F \cap U_{F'} = \phi$

ويقال عن الفضاء (X,τ) إنه فضاء ناظمي normal space (سوي) إذا كان فضاء T_4 و T_1 في آن واحد.

مثال: - إن أي فضاء متري هو فضاء تبولوجي T_4 وهو فضاء ناظمي كذلك.

- إن أي فضاء متقطع (X,τ) بل وأي فضاء مترى أو متري، يتمتع بجميع خواص الفصل في الفضاءات التبولوجية التي أوردناها آنفاً هو فضاء T_0 T_1 T_2 T_3 T_4 ومنتظم وناظمي

وتجدر الإشارة إلى أن كون الفضاء فضاء T_4 لا يترتب عليه أن يكون فضاء T_3 بالضرورة. وكذلك لا يترتب على كون الفضاء فضاء T_3 أن يكون فضاء T_4

وكذلك ليس بالضرورة أن يكون كل فضاء T_4 فضاءً ناظمياً

وكمثال على الحالة الأخيرة نورد الفضاء التافه الذي يحوي أكثر من نقطة فهذا الفضاء هو T_4 دون أن يكون ناظمياً.

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاءً تبولوجياً T_4 هو التالي: أياً كانت المجموعة F المغلقة في X وأياً كان الجوار المفتوح U لـ F فيوجد جوار مفتوح V لـ F بحيث يكون $F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

مبرهنة:

- إذا كان (X,τ) و (Y,τ') فضائين تبولوجيين متصاكلين (هوميومورفيين) وكان (X,τ) فضاءً T_4 (ناظمياً) فإن (Y,τ') فضاءً T_4 ناظمي.
- إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً T_4 (ناظمياً) وكانت Y مجموعة جزئية مغلقة في (X,τ) عندئذٍ فإن الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) هو فضاء T_4 ناظمي ناظمي كذلك.
- إذا كانا $(\prod_{i=1}^{n} X_i, \tau)$ لجماعة منتهية من الفضاءات التبولوجية فضاءً ناظمياً فإن (X_i, τ_i) هو فضاء ناظمي أياً كان $n \geq i \geq 1$

إن العكس غير صحيح بالضرورة.

END

المحاضرة $\boxed{12}$ (عملي).

مبرهنة: لتكن $X \neq \phi$ و $Int : P(X) \longrightarrow P(X)$
تطبيقاً يحقق الشروط:

$\boxed{1}$ $Int(X) = X$

$\boxed{2}$ $\forall A \in P(X) ; \ Int(Int(A)) = Int(A)$

$\boxed{3}$ $\forall A \in P(X) ; \ Int(A) \subseteq A$

$\boxed{4}$ $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$

ولنضع $\tau = \{\theta : Int(\theta) = \theta, \theta \in P(X)\}$

أثبت أن τ تبولوجيا على X

الحل:

$\tau = \{E \subseteq X : Int(E) = E\}$

$X, \phi \in \tau$

$E, F \in \tau \Longrightarrow E \cap F \in \tau$

$(E_\alpha)_{\alpha \in A} \in \tau \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \in \tau$

$(1) \Longrightarrow X \in \tau$

$(2) \Longrightarrow \phi \subseteq Int \subseteq \phi \Longrightarrow Int(\phi) = \phi$

$\Longrightarrow \phi \in \tau$

(4) $E, F \in \tau : Int(E) = E : Int(F) = F$

$Int(E \cap F) = Int(E) \cap Int(F) = E \cap F$

$\Longrightarrow E \cap F \in \tau$

نريد إثبات أن

$$A \subseteq B \Longrightarrow Int(A) \subseteq Int(B)$$

لتكن $A = A \cap B$

$$Int(A) = Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$$

$$\Longrightarrow Int(A) \subseteq Int(B)$$

$$(E_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \in \tau$$

$$Int(\cup E_\alpha) = \cup E_\alpha$$

$$(2) \Rightarrow Int(\cup E_\alpha) \subseteq \cup E_\alpha \longrightarrow ☆$$

$$\forall \alpha \in A : \quad E_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$$

$$Int(E_\alpha) \subseteq Int(\cup E_\alpha)$$

$$E_\alpha \subseteq Int(\cup E_\alpha) \quad , \forall \alpha \in A$$

$$\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \subseteq Int(\cup E_\alpha) \longrightarrow ☆$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \in \tau$$

~ . ~ . ~ , ~ , ~

☆ إذا كان لدي:

قاعدة مرشحة
مرشحة
مرشحة أعظمية

$\Big\}$ وفق تطبيق ليس غامر $\Big\} \Longleftarrow$ مرشحة أعظمية

سؤال امتحاني :

مرشحة أعظمية + غامر $\overset{\text{تطبيق}}{=}$ مرشحة أعظمية

- يجب أن نثبت أنها مرشحة ثم نثبت أنها مرشحة أعظمية وفق تطبيق غامر

☆- $T_1 + T_3 =$ منتظم rugular

☆- $T_1 + T_4 =$ ناظمي nurmal

END

إعداد

نزار تيناوي ☺ رشا رويحي