المحاضرة الرابعة

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: تمارين و المنحني الهندسي

نظري
عملي

* للاثبات كون مجموعة نقطية ما قوساً بسيطاً:
نوجد تمثيلاً $\vec{r}:[a,b] \to R^3$ لهذه المجموعة النقطية (قد تكون معطى) ونثبت أن:

1) $\vec{r}$ مستمر على $[a,b]$ (جميع مركباتها مستمرة)

2) $\vec{r}$ متباينة على $[a,b]$ ويتم ذلك بإحدى الطرق التالية:

* الدالة متزايدة أو متناقصة تماماً $\Longrightarrow$ $\vec{r}$ متباينة.

* إحدى مركبات $\vec{r}$ متباينة $\Longrightarrow$ $\vec{r}$ متباينة

* تعريف التباين اي تساوي الصور $\Longrightarrow$ تساوي العناصر.

3) مجموعة قيم $\vec{r}$ هي مجموعة النقطية نفسها.

* تمرين (1): اثبت ان مجموعة نقاط الفضاء المعرفة بالمساواة

$$\Gamma = \{ (x, f(x), g(x)) : x \in [a,b] \}$$

حيث f و g دالتان مستمرتان على $[a,b]$ قوس بسيط

* الحل: لنأخذ التمثيل $\vec{r}$ المعرف بمساواة $\vec{r}:[a,b] \to R^3$

$$\vec{r}(t) = (t, f(t), g(t))$$

1) ان الدالة $\vec{r}$ مستمرة لان كلاً من f و g و t مستمرة على $[a,b]$ ان كلاً من f و g دوال مستمرة على $[a,b]$ فرضاً، t كثير حدود مستمر على R وبالتالي على اي مجال جزئي من R ومنه فهي مستمرة على $[a,b]$

2) ان $\vec{r}$ متباينة لان المركبة الأولى متباينة وضوحاً

3) $\vec{r}([a,b]) = \{\vec{r}(t) : t \in [a,b]\}$
$$= \{ (t, f(t), g(t)) : t \in [a,b] \} = \Gamma$$

* تمرين: اثبت ان ثلاثة ارباع الدائرة قوس بسيط ؟؟؟

لنأخذ التمثيل $\vec{r}$: $\vec{r}:[0,\frac{3\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$r(t)=(\cos t,\sin t)$

1) الدالة r مستمرة على المجال $[0,\frac{3\pi}{2}]$

2) ان r متباين لدينا $t_1,t_2 \in [0,\frac{3\pi}{2}]$, $r(t_1)=r(t_2)$

$\iff (\cos(t_1),\sin(t_1))=(\cos(t_2),\sin(t_2))$

$\iff \cos(t_1)=\cos(t_2)$ و $\sin(t_1)=\sin(t_2)$

$\iff t_1=t_2 \Rightarrow$ r متباين

المجموعة النقطية c هي ثلاث ارباع دائرة $\Leftarrow$ ثلاث ارباع دائرة هو قوس بسيط

* ملاحظة:

اذا طلب نفس التمرين لكن مركز الدائرة ليس الصفر وضمن قطر لا يساوي واحد:

$x_0=x_0+r\cos(t)$

$y_0=y_0+r\sin(t)$

* سؤال دورة:

$r(t)=(\cos(t),\sin t,2t)$ تمثيل نقطي لـ L ، هل $r[1,2]$ قوس بسيط.

ان $\cos t , \sin t , 2t$ دوال مستمرة على $[1,2]$ $\Leftarrow$ r مستمرة على $[1,2]$

لتكن $f(t)=2t$ $t_1,t_2\in[1,2]$ $\Leftarrow$

$f(t_1)=f(t_2) \Rightarrow 2t_1=2t_2 \Rightarrow t_1=t_2$

اي ان f متباين على $[1,2]$ $\Leftarrow$ $\vec{r}$ متباين $\Leftarrow$ r قوس بسيط

* ملاحظة:

كل دالة متباينة هي دالة متباينة موضعياً، والعكس غير صحيح

* المنحني الهندسي L:

تكون مجموعة L من نقاط الفضاء منحنياً هندسياً اذا وفقط اذا كانت مجموعة نقطية ذات تمثيلاً وسيطاً مستمراً ومتباين موضعياً على مجال ما (مفتوح، مغلق، نصف مفتوح)

هذا يعني $L \subseteq \mathbb{R}^3$ منحني هندسي اذا وفقط اذا وجد:

$$\exists \vec{r} : I \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{مستمر}} \mathbb{R}^3$$

بحيث يكون

$$\vec{r}(I) = \vec{OL}$$

إذا كان $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ فإنّنا نسمي المعادلات

$$x = x(t) \quad , y = y(t) \quad , z = z(t)$$

معادلات وسيطية لـ $\mathcal{L}$

* أمثلة عن منحنيات هندسية:

1. كل قوس بسيط هو منحنٍ هندسي والعكس غير صحيح في الحالة العامة
2. الدائرة كاملة منحنٍ هندسي فهي مجموعة نقطية تمثل

$$\vec{r} :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad : r(t) = (x_0 + R\cos t , y_0 + R\sin t)$$

وحيث $b - a > 2\pi$ وهذا التمثيل وضوحاً مستمر على مجال $]a,b[$ لأن مركباته مستمرتان على R كما أن $\vec{r}$ دالة متباينة موضعياً

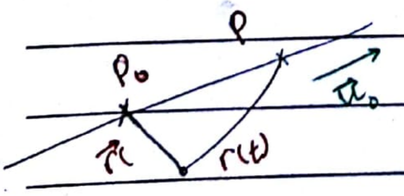
لتكن $t_0 \in]a,b[$ ولنأخذ $\delta_{t_0} = \dfrac{\min(t_0 - a , b - t_0 , \pi)}{3}$

عندئذ يكون $[t_0 - \delta_{t_0} , t_0 + \delta_{t_0}]$ وكذلك طول هذا المجال $2\delta_{t_0}$ وبما أن $2\delta_{t_0} < \pi$ فإن الدالة $\vec{r}$ متباينة على J_{t_0} لعدم وجود أي قيمتين مختلفتين لـ t في مجال J_{t_0} لهما نفس $\sin t , \cos t$ أي أن طول هذا المجال أقل من 2π

هذا المثال يبين أن الدائرة ليست قوساً بسيطاً فهذا مثال لمنحنٍ هندسي وليس قوساً بسيطة

* قوس دائرة غير كامل بدون طرفيه هو منحنٍ هندسي وليس قوساً بسيطة

* مثال: إن الدالة $r(t) = r_0 + t u_0$ حيث r_0 و u_0 متجهان ثابتان في $\mathbb{R}^3$ يمثل وسيطاً للمستقيم المار من نقطة P_0 التي متجهة موضعها المتجه r_0 والموازي للمتجه الثابت u_0



$$P_0P \parallel u_0$$

$$\Rightarrow \vec{P_0P} = t\vec{u_0}$$

حسب قاعدة شال $\vec{OP} - \vec{OP_0} = t\vec{u_0}$

هو تمثيل $\Rightarrow r(t) = r_0 + tu$

هكذا يكون الحل لو طلب منا إيجاد التمثيل الوسيطي.

ان المستقيم بسابقة هو منحني هندسي وليس قوساً بسيطاً لأن تمثيله:
تمثيل r هو عبارة عن تمثيل مستمر على R بكاملها لأن الدالة $\vec{r_0}$ متجهة مستمرة على R بكاملها والدالة $t\vec{u_0}$ دالة متجهية ثابتة وهي مستمرة على R لأنها حاصل ضرب دالة سلمية مستمرة بدالة متجهية مستمرة هو دالة مستمرة كما أن هذه التمثيل هو دالة متباين:

$$r(t_1) = r(t_2) \Rightarrow \vec{r_0} + t_1\vec{u_0} = \vec{r_0} + t_2\vec{u_0}$$

$$\Rightarrow t_1\vec{u_0} = t_2\vec{u_0} \Rightarrow t_1 = t_2$$

لأنه غير محدود وليس قوساً بسيطاً لكن مقصور هذا التمثيل على أي مجال مغلق هو $[a,b] \subset \mathbb{R}$ قوس بسيط لأن مستمر ومتباين على أي مجموعات نقطية مثل هذه مقصورات عبارة عن: قطعة مستقيمة مع طرفيها ومنه القطعة المستقيمة هي قوس بسيط

★ ★ انتهت المحاضرة ★ ★