المحاضرة 17

◄ دكتور المادة: محمد بشير قابيل

◄ عنوان المحاضرة:

نظري
عملي

تمرين: أثبت أن كل فضاء متري هو فضاء T_4

الحل: ليكن (X,d) فضاءً مترياً وسنثبت أنه فضاء T_4 من خلال إثبات أنه يوجد تطبيق $f: X \longrightarrow [0,1]$ مستمر ويحقق أنه من أجل المجموعتين المغلقتين والمنفصلتين A, B فإن:

$f(A)=0$ و $f(B)=1$ وتقابل

$$f:(X,d)\longrightarrow([0,1],|\cdot|)$$

$$x \longmapsto f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$$

نلاحظ أن $f(A)=0$ و $f(B)=1$

تمرين: كل فضاء متري هو $T_{3\frac{1}{2}}$

الحل: فقط نضع في التمرين السابق $B=\{x_0\}$

مبرهنة تيتس في التمديد:

في فضاء ناظمي X، كل تطبيق مستمر على مجموعة مغلقة يمكن تمديده على X

سنبرهن الآن أنه إذا فعلاً كان التمديد السابق محقق من أجل أي مجموعة مغلقة في X فإن (X,τ) هو T_4

ليكن A,B مجموعتان مغلقتان وغير خاليتين ومنفصلتان في X ولنأخذ $F=A\cup B$، إن F مغلقة ((اجتماع مغلقين يكون مجموعة مغلقة))

ولنعرف التطبيق: $f: F\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x\longmapsto f(x)=\begin{cases}0 & : x\in A\\ 1 & : x\in B\end{cases}$$

نلاحظ أن $\begin{cases} f(A)=0 \\ f(B)=1 \end{cases}$ وأن الصورة العكسية لكل مغلقة هي مغلقة

حيث إذا كانت M مغلقة في $\mathbb{R}$ وكانت تحوي الصفر ولا تحوي الواحد
فصورتها العكسية هي A

وإذا كانت M مغلقة في $\mathbb{R}$ وكانت تحوي الواحد ولاتحوي الصفر
فصورتها العكسية هي B

وإذا كانت M مغلقة في $\mathbb{R}$ وكانت تحوي الصفر والواحد فصورتها العكسية
$A \cup B$

وإذا كانت M مغلقة في $\mathbb{R}$ ولا تحوي لا الصفر ولا الواحد
فصورتها العكسية ϕ

وفي كل الحالات تكون مغلقة $\Leftarrow$ f مستمر على F

وحسب نص تيتس فإنه يوجد ممدد لهذا التابع f وليكن

$$\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \in A \subseteq F \Longrightarrow \tilde{f}(x) = f(x) = 0$$

$$x \in B \subseteq F \Longrightarrow \tilde{f}(x) = f(x) = 1$$

ومن ثم نأخذ $O_A = \tilde{f}^{-1}(]-\infty, \frac{1}{3}[)$ و $A \subseteq O_A$

$O_B = \tilde{f}^{-1}(]\frac{2}{3}, \infty[)$ و $B \subseteq O_B$

وأيضاً $O_A \cap O_B = \phi$ $\Leftarrow$ الفضاء هنا هو T_4

قابلية العد في الفضاءات التبولوجية

تعريف (1): يقال عن فضاء تبولوجي (X, τ) إنه يتمتع بقابلية العد الأولى في نقطة x منه إذا وجدت جملة جوارات أساسية N_x للنقطة x بحيث تكون الجماعة N_x قابلة للعد

ونقول عن (X, τ) إنه يتمتع بقابلية العد الأولى أو إنه فضاء C_1 إذا كان يتمتع بقابلية العد الأولى في كل نقطة من نقاطه.

تعريف (2): يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء C_2 ، أو إنه يمتع بقابلية العد الثانية إذا وجدت قاعدة قابلة للعد للتبولوجيا τ

تعريف (3): يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه قابل للفصل (فصول) separable space إذا احوى مجموعة كثيفة وقابلة للعد ((أي إذا وجد $A \subseteq X$ بحيث تكون $\bar{A}=X$ و A قابلة للعد))

كل C_2 هو C_1

$\prod_{i=1}^{n}(X_i,\tau_i)$ هو C_2 $\Longleftrightarrow$ (X_i,τ_i) هو C_2 $\forall i=1,2,\ldots,n$

تعريف (4): (فضاء لينديليوف):

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و A مجموعة جزئية من X فإذا كانت $\{U_i\}_{i\in I}$ جماعة من المجموعات الجزئية من X بحيث

$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ و U_i مفتوحات

- نقول عن (A,τ_A) إنه فضاء لينديليوف إذا احوت هذه الجماعة على جماعة جزئية اجتماعها يحوي A وقابلة للعد

- بكلمات أخرى:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً و $A \subseteq X$ نقول عن الفضاء الجزئي (A,τ_A) إنه فضاء لينديليوف إذا احوت كل تغطية مفتوحة لهذا الفضاء تغطية جزئية قابلة للعد

مبرهنة:

كل فضاء متري C_2 هو فضاء فصول والعكس صحيح .

البرهان: $\Leftarrow$

ليكن (X,d) فضاءً مترياً يتمتع بقابلية العد الثانية (C_2) ولنثبت أنه فصول

لما كان (X,d) هو C_2 فإنه يوجد $\mathcal{B} \subseteq T_d$ قاعدة قابلة للعد للتبولوجيا T_d

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}, B_i \neq \phi, \forall i=1,2,\ldots$$

ولتكن $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ حيث $x_i \in B_i$ لأجل كل $i=1,2,\ldots$

من الواضح ان A معدودة، ولنثبت أنها كثيفة في X أي $\bar{A} = X$

لدينا $\bar{A} \subseteq X$ وليكن $x \in X$ وليكن $\theta_x \in T_d$ بحيث $x \in \theta_x$

ولما كانت $\mathcal{B}$ قاعدة فإن θ_x تكتب على شكل اتحاد لعناصر من $\mathcal{B}$

$$\theta_x = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \ldots$$

$$\Rightarrow A \cap \theta_x = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\} \neq \phi , x_{i_j} \in B_{i_j}$$

$\Leftarrow x \in \bar{A}$

$\Leftarrow X \in \bar{A}$

$\Leftarrow \bar{A} = X$

$\Leftarrow X$ فصول

نلاحظ أنه لم نحتاج لتابع المسافة في هذا البرهان، وبالتالي مهما يكن الفضاء التبولوجي (X,τ) و C_2 فإنه سيكون فصول

أما في برهان العكس سنحتاج لكون (X,τ) متري.

$\Rightarrow$ لنفرض أن

(X,d) فضاءً مترياً فصولاً عندئذٍ X يحوي على مجموعة A كثيفة فيه ومعدودة أي: $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ و $\bar{A} = X$

ولنأخذ الجماعة $\mathcal{B} = \{N(a,q) : a \in A, q \in Q\}$

جماعة الكرات المفتوحة التي مراكزها من A وأنصاف أقطارها أعداد عادية.

لاحظ أن B قابلة للعد لأن عدد الكرات = عدد المراكز = عدد عناصر A = عدودة

إذن B تشكل قاعدة للتبولوجيا على X:

$\forall \Theta \in T \;,\; \forall p \in \Theta \;;\; \exists N(a, q) \in B : p \in N(a, q) \subseteq \Theta$

وبما أن $p \in \Theta$ فإنها تقطع أن تكون مركزاً لكرة محتواة في Θ

$\exists N(p, \varepsilon) \;:\; p \in N(p, \varepsilon) \subseteq G$

ولما كانت $X = \bar{A}$ فإنه:

$\exists a_0 \in A \;:\; d(p, a_0) < \frac{1}{3}\varepsilon$

لنأخذ $q_0 \in Q$ بحيث $\frac{\varepsilon}{3} < q_0 < \frac{2}{3}\varepsilon$ عندها:

$p \in N(a_0, q_0) \subseteq N(p, \varepsilon) \subseteq \Theta$

ولكن $N(a_0, q_0) \in B \Longleftarrow B$ قاعدة عدودة لـ $(X, T_d) \Leftarrow$ هو C_2

... الترابط ...

تعريف: ليكن (X, T) فضاء تبولوجي، نقول إن هذا الفضاء غير مترابط إذا وجد $A, B \subseteq X$ مفتوحتان بحيث:

$A \neq \phi \;,\; B \neq \phi$

$A \cap B = \phi \;,\; A \cup B = X$

وعندئذ ندعو A, B فصلاً لـ X.

END

إعداد

رشا رويمي

نذير تيناوي