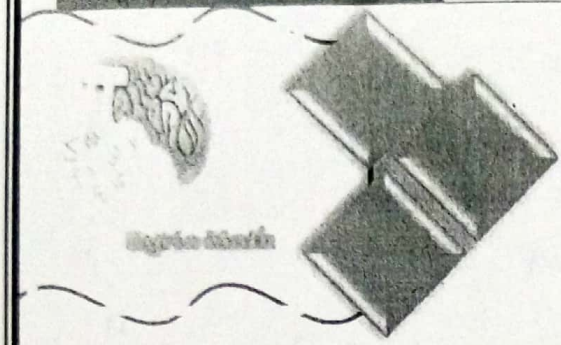


المحاضرة الخامسة

◄ دكتور المادة: خالد حنيفس

◄ عنوان المحاضرة: مثال حلّ جملة معادلات خطية

نظري ☑ عملي ☐

سنطبق ما درسناه في المحاضرة السابقة في حلّ جملة المعادلات التالية:

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 5$$
$$2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8$$
$$-x_1 + 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -4$$
$$-3x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 6$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_5 = 7$$

لنكتب الجملة السابقة بشكل مصفوفة أولاً لتسهيل الحلّ:

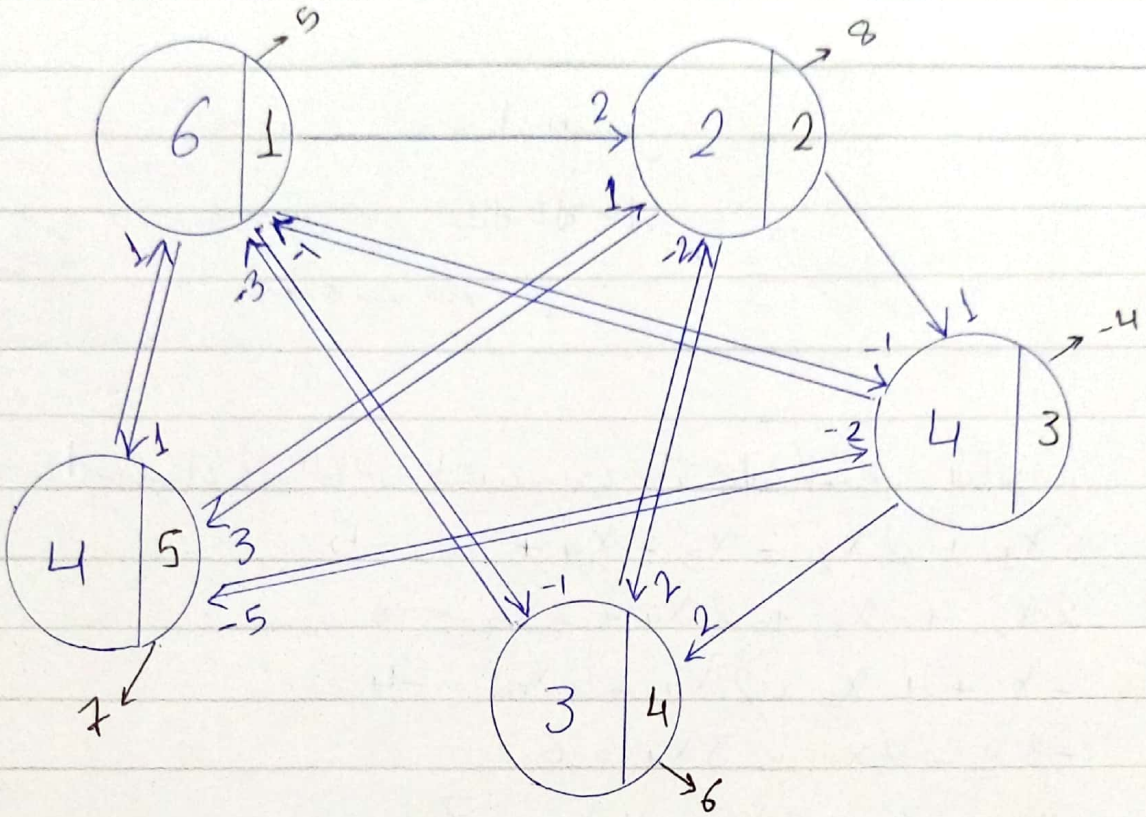
$$\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & -5 \\ -3 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

سنرسم البيان اعتماداً على المعطيات السابقة (في الصفحة التالية ←)

وبالطريقة الجبرية نحسب x_1 من المعادلة الأولى:

$$x_1 = \frac{5 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5}{6}$$

Scanned by CamScanner



- بتعويض x_1 التي حصلنا عليها سابقاً في جملة المعادلات والإصلاح نحصل على ما يلي:

$$2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8$$

$$\frac{2}{6}x_2 + \frac{23}{6}x_3 + \frac{11}{6}x_4 - \frac{29}{6}x_5 = \frac{-19}{6}$$

$$-x_2 - \frac{3}{6}x_3 + \frac{5}{2}x_4 + \frac{3}{6}x_5 = 8.5$$

$$\frac{4}{6}x_2 - \frac{11}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{23}{6}x_5 = \frac{37}{6}$$

- وتكون مصفوفة الأمثال للجملة الجديدة (بعد حذف x_1):

$$\begin{array}{c} \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{6} & \frac{23}{6} & \frac{11}{6} & \frac{-29}{6} \\ -1 & \frac{-3}{6} & \frac{5}{2} & \frac{3}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{-11}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{23}{6} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 8 \\ \frac{-19}{6} \\ 8.5 \\ \frac{37}{6} \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

- أوجدنا الحل السابق بالاعتماد على الطرق الجبرية التي تعرفها مسبقاً ، ولنحاول الآن إيجاد الحل نفسه بالاعتماد على نظرية البيان (باستخدام القوانين من المحاضرة السابقة):

$$b_k' = b_k - \frac{a_{ki}\, b_i}{a_{ii}} \quad \rightarrow \text{الطرف الثاني}$$

$$a_{kk}' = a_{kk} - \frac{a_{ki}\, a_{ik}}{a_{ii}} \quad \rightarrow \text{عناصر القطر الرئيسي}$$

$$a_{kl}' = a_{kl} - \frac{a_{ki}\, a_{il}}{a_{ii}} \quad \rightarrow \text{بقية العناصر}$$

1 $i = 1$ (أي حذف العمود الأول):

$$b_2' = b_2 - \frac{a_{21}\, b_1}{a_{11}} = 8 - \frac{(0)(5)}{6} = 8$$

$$b_3' = b_3 - \frac{a_{31}\, b_1}{a_{11}} = -4 - \frac{(-1)(5)}{6} = \frac{-19}{6}$$

$$b_4' = b_4 - \frac{a_{41}\, b_1}{a_{11}} = 6 - \frac{(-3)(5)}{6} = \frac{51}{6} = 8.5$$

$$b_5' = b_5 - \frac{a_{51}\, b_1}{a_{11}} = 7 - \frac{(1)(5)}{6} = \frac{37}{6}$$

$$a_{22}' = a_{22} - \frac{a_{21}\, a_{12}}{a_{11}} = 2 - \frac{(0)(2)}{6} = 2$$

$$a_{33}' = a_{33} - \frac{a_{31}\, a_{13}}{a_{11}} = 4 - \frac{(-1)(-1)}{6} = \frac{23}{6}$$

(وهي القيم الموجودة في الدوائر.)

$$a_{44}' = a_{44} - \frac{a_{41}\, a_{14}}{a_{11}} = 3 - \frac{(-3)(-1)}{6} = \frac{5}{2}$$

$$a_{55}' = a_{55} - \frac{a_{51}\, a_{15}}{a_{11}} = 4 - \frac{(1)(1)}{6} = \frac{23}{6}$$

Scanned by CamScanner

- الحسابات بين العقد : ② → ③ , ② → ④ , ② → ⑤

$$a_{23}' = a_{23} - \frac{a_{21}\,a_{13}}{a_{11}} = 1 - \frac{(0)(-1)}{6} = 1$$

$$a_{24}' = a_{24} - \frac{a_{21}\,a_{14}}{a_{11}} = 2 - \frac{(0)(-1)}{6} = 2$$

$$a_{25}' = a_{25} - \frac{a_{21}\,a_{15}}{a_{11}} = 3 - \frac{(0)(1)}{6} = 3$$

---

③ → ② , ③ → ④ , ③ → ⑤

$$a_{32}' = a_{32} - \frac{a_{31}\,a_{12}}{a_{11}} = 0 - \frac{(-1)(2)}{6} = \frac{2}{6}$$

$$a_{34}' = a_{34} - \frac{a_{31}\,a_{14}}{a_{11}} = 2 - \frac{(-1)(-1)}{6} = \frac{11}{6}$$

$$a_{35}' = a_{35} - \frac{a_{31}\,a_{15}}{a_{11}} = -5 - \frac{(-1)(1)}{6} = -\frac{29}{6}$$

---

④ → ② , ④ → ③ , ④ → ⑤

$$a_{42}' = a_{42} - \frac{a_{41}\,a_{12}}{a_{11}} = -2 - \frac{(-3)(2)}{6} = -1$$

$$a_{43}' = a_{43} - \frac{a_{41}\,a_{13}}{a_{11}} = 0 - \frac{(-3)(-1)}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$a_{45}' = a_{45} - \frac{a_{41}\,a_{15}}{a_{11}} = 0 - \frac{(-3)(1)}{6} = \frac{3}{6}$$

---

⑤ → ② , ⑤ → ③ , ⑤ → ④

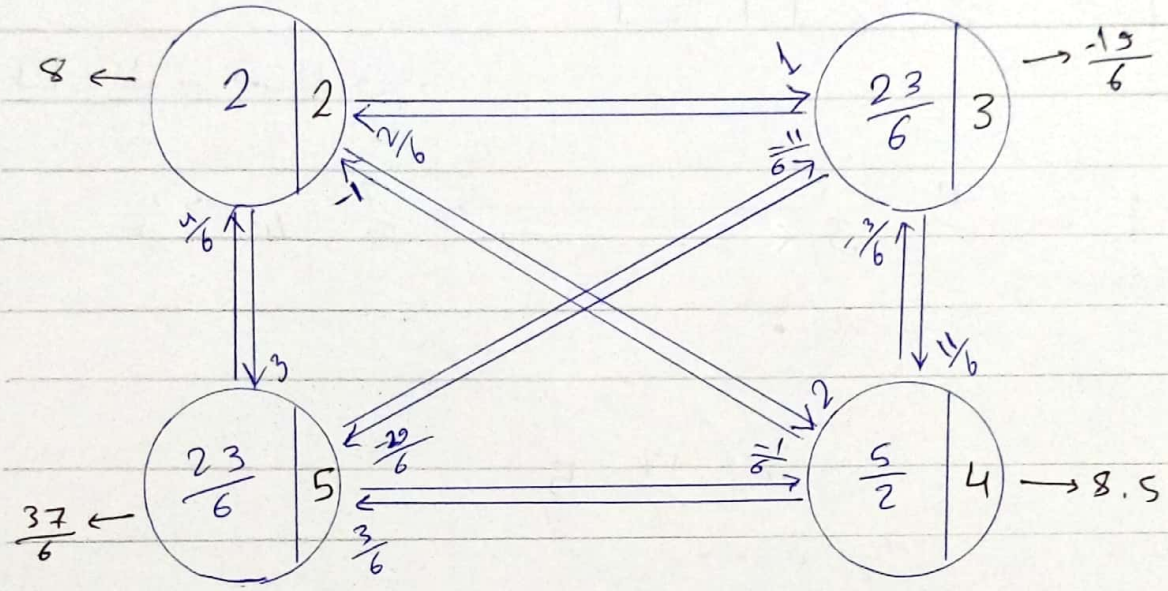
$$a_{52}' = a_{52} - \frac{a_{51}\,a_{12}}{a_{11}} = 1 - \frac{(1)(2)}{6} = \frac{4}{6}$$

$$a_{53}' = a_{53} - \frac{a_{51}\,a_{13}}{a_{11}} = -2 - \frac{(1)(-1)}{6} = \frac{-11}{6}$$

Scanned by CamScanner

$$a_{54}' = a_{54} - \frac{a_{51}\,a_{14}}{a_{11}} = 0 - \frac{(1)(-1)}{6} = \frac{1}{6}$$

- لرسم البيان الجديد بعد حذف العقدة الأولى :



$i=2$ 2

((حذف العقدة الثانية)) :

$$b_3' = b_3 - \frac{a_{32}\,b_2}{a_{22}} = \frac{-19}{6} - \frac{(\frac{2}{6})(8)}{2} = \frac{-9}{2}$$

$$b_4' = b_4 - \frac{a_{42}\,b_2}{a_{22}} = 8.5 - \frac{(-1)(8)}{2} = \frac{25}{2}$$

$$b_5' = b_5 - \frac{a_{52}\,b_2}{a_{22}} = \frac{37}{6} - \frac{(\frac{4}{6})(8)}{2} = \frac{7}{2}$$

- بالمتابعة باستخدام القوانين السابقة نحصل على النتائج التالية :

$$a_{33}' = \frac{11}{3} \quad , \quad a_{44}' = \frac{7}{2} \quad , \quad a_{55}' = \frac{17}{6}$$

$$a_{34}' = \frac{3}{2} \quad , \quad a_{35}' = \frac{-16}{3} \quad , \quad a_{43}' = 0$$

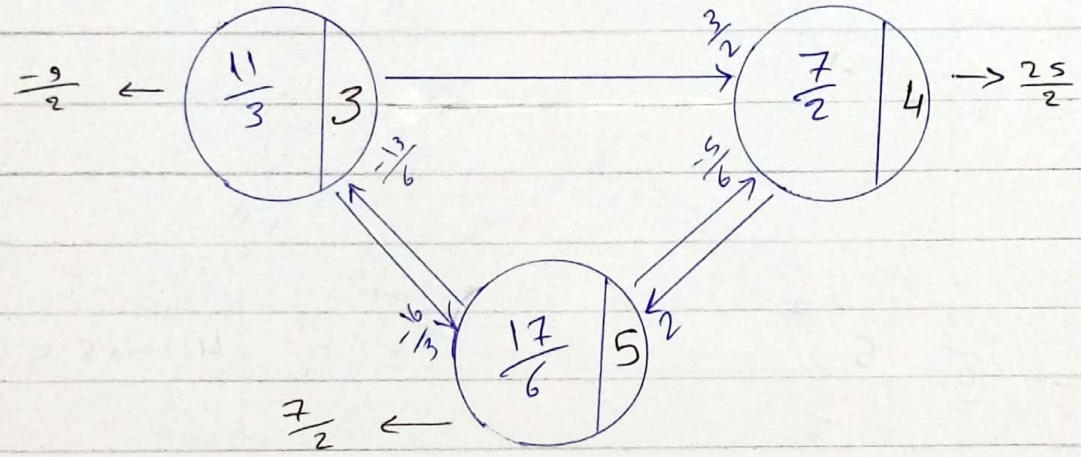
$$a_{45}' = 2 \quad , \quad a_{53}' = \frac{-13}{6} \quad , \quad a_{54}' = \frac{-5}{6}$$

Scanned by CamScanner

- وبذلك تصبح مصفوفة الأمثال الجديدة :

$$\begin{array}{c} \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & \frac{3}{2} & \frac{-16}{3} \\ 0 & \frac{7}{2} & 2 \\ \frac{-13}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{17}{6} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \frac{-9}{2} \\ \frac{25}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

و البيان الجديد بعد الحذف :



3 $i = 3$ ((حذف العقدة الثالثة)) :

باستخدام القوانين كما في الخطوتين السابقتين نحصل على :

$$b_4' = \frac{25}{2} \quad , \quad b_5' = \frac{37}{44}$$

$$a_{44}' = \frac{7}{2} \quad , \quad a_{55}' = \frac{-7}{22}$$

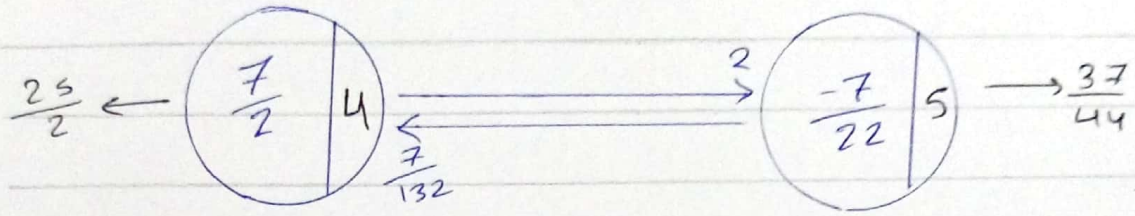
$$a_{45}' = 2 \quad , \quad a_{54}' = \frac{7}{132}$$

- مصفوفة الأمثال الجديدة :

$$\begin{array}{c} \\ ④ \\ ⑤ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 2 \\ \frac{7}{132} & \frac{-7}{22} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \frac{25}{2} \\ \frac{37}{44} \end{bmatrix}$$

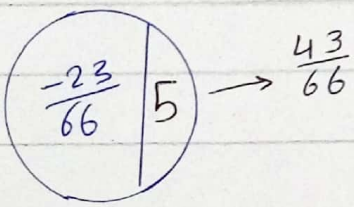
Scanned by CamScanner

- والبيان الجديد :



4 | i=4 ((جذر العقدة الرابعة)) :

$b_5' = \frac{43}{66}$, $a_{55}' = \frac{-23}{66}$



- إذاً الحل النهائي :

$$\frac{-23}{66} x_5 = \frac{43}{66} \rightarrow \boxed{x_5 = -\frac{43}{23} \simeq -1.87}$$

ونعوض في المعادلة الناتجة عن الخطوة السابقة :

$$\frac{7}{2} x_4 + 2 x_5 = \frac{25}{2} \rightarrow \boxed{x_4 = \frac{747}{161}}$$

وهكذا نعوض تراجعياً حتى نحصل على الحل النهائي :

$$\boxed{x_3 = \frac{-941}{161}} \quad , \quad \boxed{x_2 = \frac{117}{23}}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{-121}{161}}$$

انتهت المحاضرة

Scanned by CamScanner