درسنا فيما سبق مسلمات الفصل $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4$ وسندرس الآن مبرهنات بهذا الخصوص...

مبرهنة:

ليكن $(X,\tau)$ فضاءً تبولوجياً عندئذٍ يكون $(X,\tau)$ فضاء $T_1$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة وحيدة العنصر مغلقة.

أي $(X,\tau)$ هو فضاء $T_1$ $\Leftrightarrow$ $\forall p \in X \; ; \; \overline{\{p\}} = \{p\}$

البرهان:

$\Leftarrow$ ليكن $x \in X$ ولنأخذ $A = \{x\}$ ولنفرض أن $(X,\tau)$ فضاء تبولوجي $T_1$ ولنثبت أن $\overline{A} = A$

لدينا دوماً $A \in \overline{A}$ ولنثبت الاحتواء المعاكس.

ليكن $y \in \overline{A}$ ولنفرض مؤقتاً أن $x \neq y$ ولما كان الفضاء $T_1$ فإنه يوجد $\theta_x$ و $\theta_y$ جوارين لـ $x$ و $y$ على الترتيب بحيث $y \notin \theta_x \quad , \quad x \notin \theta_y$

ولكن $y \in \overline{A} \Leftarrow$ :

$\forall \theta_y \; , \; \theta_y \cap A \neq \phi$

جوار مفروض حول $y$ $\quad \theta_y \cap \{x\} \neq \phi \Rightarrow x \in \theta_y$

وهذا خلف $\Leftarrow y = x \Leftarrow \overline{A} = \{x\}$

$\Leftarrow \overline{A} = A$ وهو المطلوب

$\Rightarrow$ ليكن $(X,\tau)$ فضاءً تبولوجياً يحقق الخاصة:

$\forall p \in X : \overline{\{p\}} = \{p\}$

ولنثبت أن $(X,\tau)$ هو فضاء $T_1$

من أجل كل $x,y\in X$ بحيث $x\neq y$ فإن $x\notin \{y\}=\overline{\{y\}}$

$\Rightarrow \exists\, \Theta_x : \Theta_x\cap\{y\}=\phi \Rightarrow y\notin\Theta_x$

مفتوح يحوي $x$

بشكل مماثل :

$\exists\, \Theta_y : \Theta_y\cap\{x\}=\phi \Rightarrow x\notin\Theta_y$

$\Leftarrow (X,\tau)$ هو $T_1$ .

ملاحظة :

من السهل إثبات $(IR,\tau_i)$ بحيث $i=1,2,3,4,10$ كلها فضاءات $T_1$

إلا أن $(R,\tau_{[a,\infty[})$ ليس $T_1$

مثال: ليكن

$X=\{a,b\}$ ولنأخذ $\tau_a=\{X,\phi,\{a\}\}$ عندئذٍ المغلقات

في هذا الفضاء $(X,\tau_a)$ هي $F=\{\phi,X,\{b\}\}$ ونلاحظ

هنا أن لدينا المجموعة الأحادية العنصر $\{a\}$ ليست مغلقة $\Leftarrow$

$(X,\tau_a)$ ليس $T_1$

مثال: ليكن $X=\{a,b,c\}$ و $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ تبولوجيا على $X$

عندئذٍ تكون المغلقات في هذا الفضاء هي $F=\{\phi,X,\{b,c\},\{a\}\}$

ولنميز الحالات التالية :

1] $a\neq b,\ b\neq c$ $\Leftarrow$ $F=\{b,c\}$ مغلقة، $a\notin F$ $\Leftarrow$ $\exists\,\Theta_a=\{a\}\in\tau,\ \exists\,\Theta_F=\{b,c\}$

$\Theta_a\cap\Theta_F=\phi$

2] $F=\{a\}$ عندئذٍ : $b\notin F$ ، $c\notin F$ $\Leftarrow$

$\exists\,\Theta_b=\{b,c\},\ \Theta_F=\{a\} : \Theta_b\cap\Theta_F=\phi$

$\exists\,\Theta_c=\{b,c\},\ \Theta_F=\{a\} : \Theta_c\cap\Theta_F=\phi$

يحقق المسلمة (CR)، إلا أنه ليس $T_1$ ذلك لأن {a} وحيدة العنصر وغير مغلقة.

تعريف: (الفضاء $T_{3\frac{1}{2}}$)

ليكن $(X,\tau)$ فضاءً تبولوجياً، نقول إنه يحقق المسلمة (CR) إذا كان لأجل كل مجموعة مغلقة F و $a \notin F$ يوجد تطبيق

$$f: X \longrightarrow [0,1]$$

ومستمر $f(F)=1 \wedge f(x)=0$

فإذا كان الفضاء $T_1$ ويحقق إضافة لذلك المسلمة (CR) قلنا إن هذا الفضاء فضاء $T_{3\frac{1}{2}}$

تعريف آخر الفضاء $T_4$:

ليكن $(X,\tau)$ فضاءً تبولوجياً و $F_1, F_2$ مغلقتان فيه فإنه يوجد تطبيق

$$f: X \xrightarrow{\text{مستمر}} [0,1]$$

حيث $\begin{cases} f(F_1)=1 \\ f(F_2)=0 \end{cases}$

وفي الحقيقة كل متري هو $T_4$ بسبب وجود التطبيق:

$$f: X \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{d(x,F_2)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$$

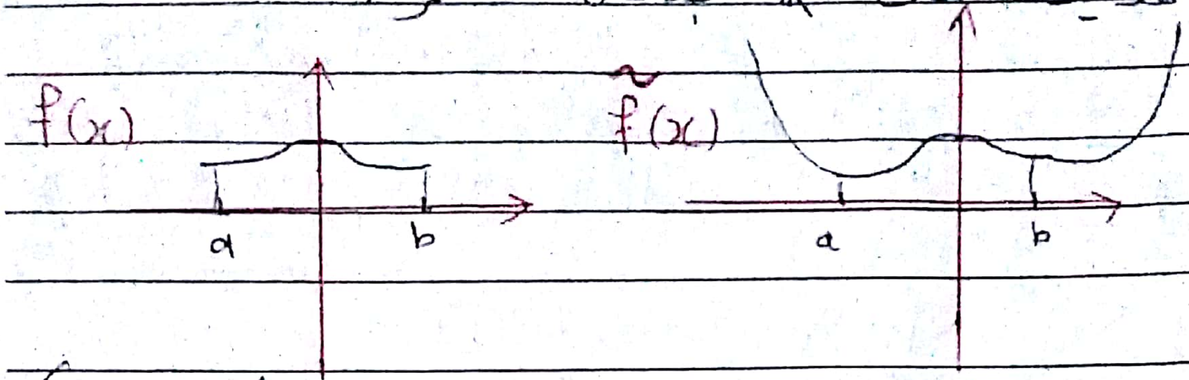
$$x \in F_1 \Longrightarrow f(x)=1$$

$$x \in F_2 \Longrightarrow f(x)=0$$

o o o o o

هل تعلم ؟ :

أن كل تابع مستمر على مجال مغلق في $\mathbb{R}$ يمكن تمديده على $\mathbb{R}$ بشكل مستمر.




مبرهنة أوريسون: الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء $(X,\tau)$ ناظمياً هو أن يكون $T_1$ وأن يتحقق الشرط التالي:
أياً كانت المجموعات المغلقتان والمنفصلتان $A,B$ في $(X,\tau)$
فيوجد تطبيق مستمر $f:(X,\tau)\longrightarrow[0,1]$
بحيث يكون $f(A)=0$ , $f(B)=1$.

مبرهنة تيتس: ليكن $(X,\tau)$ فضاءً ناظمياً و $F\subseteq X$
ومغلقة وليكن $f$ تطبيقاً مستمراً معرفاً كما يلي:

$$f:(F,\tau_F)\longrightarrow(\mathbb{R},|\cdot|)$$

عندئذٍ يوجد تمديد مستمر $\tilde{f}$ للتطبيق $f$:

$$\tilde{f}:(X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},|\cdot|)$$

$$\tilde{f}(x)=f(x)\ ,\ \forall x\in F$$

END

رشا رويعي

ننار تيناري