

نظري

دكتور المادة: محمد الشيخ

عنوان المحاضرة: تمثيل المجموعات العقدية.

المحاضرة: السادسة

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- المجموعات النقطية في المستوي العقدي.

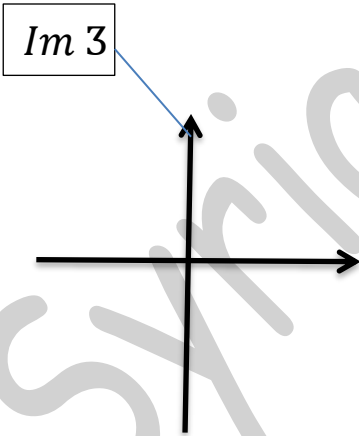
٢- تمارين.

ملاحظة: قد نوه الدكتور أن التمثيل في المستوي العقدي هام في الامتحان ولمقرر التحليل العقدي ٢ .

المجموعات النقطية في المستوي العقدي :

لتكن A مجموعة جزئية في \mathbb{C} بما أن كل عدد عقدي z من A يمثل بنقطة في المستوي العقدي فإن المجموعة A ستمثل مجموعة نقطية ونقول أنها المجموعة الممثلة لـ A في المستوي العقدي وسنرمز لها بالرمز A .

أمثلة :



(١) مثل المجموعة النقطية للمجموعة $A = \{z \in \mathbb{C} ; Re z = 0\}$

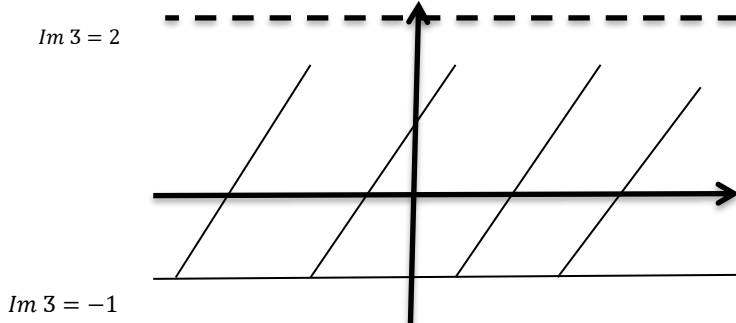
الجواب : إن المجموعة النقطية الممثلة

للمجموعة A هي المحور التخيلي OY

(2) مثل في المستوي العقدي المجموعة $B = \{z \in \mathbb{C} ; -1 \leq Im z < 2\}$

الحل : إن $Im z = -1$ هذه المساواة تمثل معادلة المستقيم $y = -1$

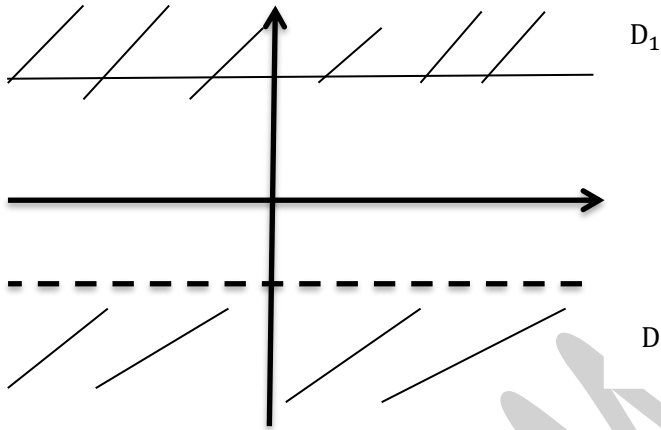
بالتالي المجموعة B تمثل الشريط الأفقي المحصور بين المستقيمين $Im\ z = -1$ و $Im\ z = 2$



مع حافته السفلى ودون حافته العليا .

لو كانت : $Im\ z \leq 2$ في هذه الحالة أصبح مع الحافتين ، أي نرسم المستقيم مستمر وليس منقطع

(٣) مثل في المستوي العقدي المجموعة $C = \{z \in \mathbb{C} ; Im\ z \geq 2 \vee Im\ z < -1\}$



أي أن : $C = D_1 \cup D_2$

هي اجتماع لمنطقتين :

الأولى D_1 هي نصف المستوي

الواقع فوق المستقيم $Im\ z = 2$

مع هذا المستقيم .

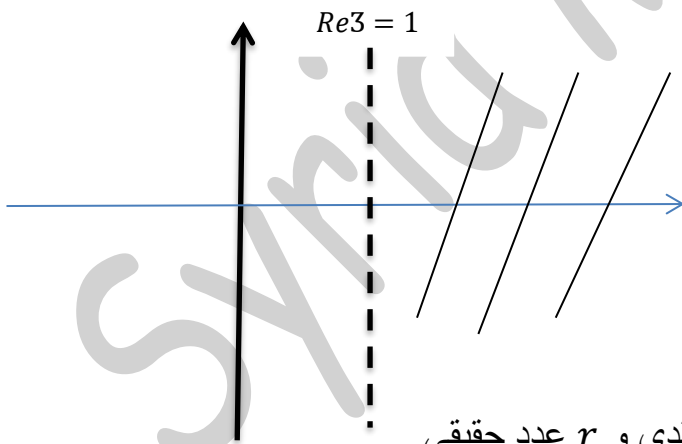
والثانية D_2 هي نصف المستوي الواقع تحت المستقيم $Im\ z = -1$ دون هذا المستقيم .

(٤) ماذا تمثل المجموعة $\{z \in \mathbb{C} ; Re\ z > 1\}$

المجموعة السابقة تمثل نصف المستوي العقدي

الواقع على يمين المستقيم $Re\ z = 1$ أو $(x = 1)$

دون المستقيم $x = 1$.



(٥) ماذا تمثل المعادلة $|z - z_0| = r$ حيث z_0 ثابت عقدي و r عدد حقيقي

نميز عدة حالات :

١- $0 > r$ فهي مجموعة خالية (الطويلة لن تساوي عدد سالب)

٢- $0 = r$ فهي تمثل النقطة z_0

لان : $|z - z_0| = 0 \Leftrightarrow z = z_0 \Leftrightarrow z - z_0 = 0$

٣- $0 < r$ هي مجموعة النقاط التي تمثل بعد 3 عن 3_0 بعد ثابت بالتالي هي دائرة مركزها 3_0 ونصف قطرها r .

(٦) ماذا تمثل المعادلة : $|3| = 1$

الحل : تمثل المعادلة : $|3| = 1$ دائرة الوحدة أي مركزها المبدأ ونصف قطرها يساوي ١ .

(٧) ماذا تمثل المعادلة : $|3 + i| = 2$

الحل : تمثل المعادلة : $|3| = 1$ دائرة مركزها $-i$ ونصف قطرها يساوي 2 .

(8) ماذا تمثل المعادلة : $|2i3 - 1| = 2$

الحل : $|2i3 - 1| = 2$

$$\Leftrightarrow |2i| \left| 3 - \frac{1}{2i} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \left| 3 + \frac{i}{2} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left| 3 + \frac{i}{2} \right| = 1$$

إذا المعادلة تمثل دائرة مركزها $-\frac{i}{2}$ ونصف قطرها يساوي ١ .

سنقوم بحل بعض الوظائف التي اعطيت في المحاضرات السابقة :

١- أثبت أن زاوية العدد العقدي $3_1 \cdot 3_2$ هي $\theta_1 + \theta_2$

الحل : ليكن : $3_1 = r_1(\cos\theta_1 + isin\theta_1)$

$$3_2 = r_2(\cos\theta_2 + isin\theta_2)$$

$$3_1 \cdot 3_2 = r_1(\cos\theta_1 + isin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + isin\theta_2)$$

$$3_1 \cdot 3_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + isin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + isin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

٢- أثبت أن $(cis(\theta))^{-1} = \overline{cis(\theta)} = cis(-\theta)$

الحل :

$$\begin{aligned} (cis(\theta))^{-1} &= \frac{1}{cis(\theta)} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= \frac{1(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \overline{cis(\theta)} \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = cis(-\theta) \end{aligned}$$

ملاحظة : $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

و $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

٣- أوجد مقلوب العدد : $z = 3 + 4i$

$$\frac{1}{3 + 4i} = \frac{3 - 4i}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{3 - 4i}{9 + 16} = \frac{3 - 4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

وظيفة :

اكتب الأعداد العقدية بالشكل المثلثي ومثلها في المستوي العقدي :

$$1) z_1 = -1 - i \quad 2) z_2 = \left(\frac{\sqrt{2} + 3i}{1 + i} \right)^4 \quad 3) z_3 = (-1 + \sqrt{3}i)^5$$

$$z = \left| \frac{(3+2i)^4}{(6+8i)^3} \right| : \text{احسب}$$

((سنورد حل التمارين في المحاضرات القادمة))

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي - باسل أبو عيسى - هالة مصطفى