◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الحادية عشر ◄ عنوان المحاضرة: المجموعة المتراصة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-المجموعة المتراصة .

٢-حل تمارين.

٣- حل تمارين الوظائف .

المجموعة المتراصة : لتكن $A \subseteq \mathbb{C}$ نقول عن A أنها متراصة إذا حوت كل تغطية مفتوحة لـ A تغطية جزئية منتهية لـ A

التغطية المفتوحة : هي جماعة من المجموعات المفتوحة التي اجتماعها يحوي A .

تذكرة : التغطية لمجموعة A هي أسرة من المجموعات من $\mathbb{C}$ بحيث اجتماعها يحوي المجموعة A

◄ **ملاحظات:**

١- كل مجموعة متراصة في فضاء تبولوجي هاوسدورفي تكون مجموعة مغلقة والعكس في الحالة العامة غير صحيح.

X فضاء هاوسدورفي $\Leftrightarrow \forall x, y \in X \,;\, \exists\, U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$

أي أن أي نقطتين فيه أستطيع أن أجد جوارين لهاتين النقطتين بحيث أن تقاطع الجوارين يساوي $\emptyset$ ،أي نقطتين فيه تملك جوارين منفصلين.

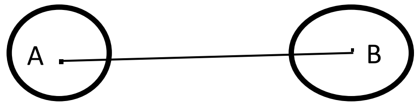
٢- كل مجموعة متراصة في فضاء متري منتهية البعد تكون محدودة لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

٣- كل فضاء متري هو فضاء هاوسدورفي:

أي إذا أخذنا فضاء متري وأخذنا نقطتين مختلفتين في هذا الفضاء فإن المسافة بينهما أكبر من الصفر

لأنه وحسب خواص المسافة إذا كانت المسافة صفر فالنقطة الأولى تنطبق على النقطة الثانية

لنأخذ كرة مركزها النقطة الأولى وكرة مركزها النقطة الثانية فإن هاتين الكرتين لن يتقاطعا .



مبرهنة :

إن أي مجموعة مغلقة ومحدودة في R^n تكون متراصة :

أي : $A \subseteq R^n \quad \Leftrightarrow \quad A$ مغلقة ومحدودة

إن $\mathbb{C} \approx R^2$

تمرين (١) : هل المجموعة $A = \{3 \in \mathbb{C} \ : 1 < |3| < 2\}$ متراصة

إن المجموعة ليست متراصة لأنها ليست مغلقة لأن النقطة $3 = 2i$ هي نقطة تجمع لهذه المجموعة لكنها لا تنتمي الى المجموعة . (نقطة من المتممة ليست داخلية في المتممة).

تمرين (٢) : هل المجموعة $B = \{3 \in \mathbb{C} \ : 1 \le |3| \le 2\}$ متراصة

المجموعة هي مجموعة متراصة لأنها مغلقة ومحدودة لوجود القرص $D(0,3)$ الذي يحويها.

ونسمي المجموعة B بحلقة مغلقة مركزها المبدأ ونصف قطرها الداخلي ١ ونصف قطرها الخارجي ٢ .

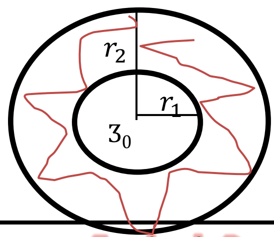
في الحالة العامة لو أخذنا المتراجحة $3 \in \mathbb{C} \ : r_1 < |3 - 3_0| < r_2$

هذه المجموعة نرمز لها $\mathrm{a_{nn}}(3_0, \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2)$ رمز الحلقة

وهي حلقة مغلقة مركزها 3_0 ونصف قطرها الداخلي r_1 ونصف قطرها الخارجي r_2.

أما لو أخذنا المتراجحة $3 \in \mathbb{C} \ : r_1 \le |3 - 3_0| \le r_2$

تسمى حلقة مغلقة مركزها 3_0 ونصف قطرها الداخلي r_1 ونصف قطرها الخارجي r_2.



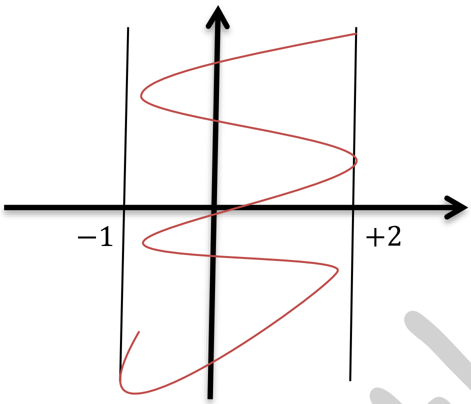
حيث أن الحلقة هي عبارة عن المنطقة بين الدائرتين الداخلية والخارجية .

تمرين (٣) : هل المجموعة $D = \{3 \in \mathbb{C} \ : -1 \le Re3 \le 2\}$ متراصة ؟

إن هذه المجموعة تمثل الشريط الشاقولي المحصور بين المستقيمين $Re3 = 2$ و $Re3 = -1$.

إن هذه المجموعة غير محدودة لأنها شريط ويتجه نحو ∞ وأيضا لا يمكن جعلها ضمن قرص نصف قطره منته .

وبالتالي المجموعة ليست متراصة .



ملاحظات :

١) أي مجموعة مغلقة محتواة في قرص تكون متراصة .
٢) تقاطع مغلقة مع متراصة هي مجموعة متراصة.

*أي نصف مستوي هو مجموعة غير متراصة في $\mathbb{C}$ لأنه مجموعة غير محدودة.

*أي قرص مفتوح هو مجموعة غير متراصة لأنه مجموعة غير مغلقة في $\mathbb{C}$.

*أي قرص مغلق هو مجموعة متراصة لأنه مجموعة مغلقة ومحدودة في $\mathbb{C}$.

*أي شريط أفقي أو شاقولي هو مجموعة غير متراصة لأنها مجموعة غير محدودة.

تمارين على ما تناولناه في المحاضرات السابقة:

حل المعادلة التالية :

$$3^2 + (-1 + 4i)3 + (-3 - 3i) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1 + 4i)^2 - 4(1)(-3 - 3i)$$

$$= 1 - 8i - 16 + 12 + 12i = -3 + 4i$$

$$r = \sqrt{9+16} = 5$$

لاحظ أن الزاوية غير شهيرة لذلك سنقوم بالحل بالشكل التالي :

نفرض δ جذرا ل Δ حيث: $\delta = x + iy$ $\Leftarrow \delta^2 = \Delta$

$$(x+iy)^2 = -3+4i$$

$$= x^2 + 2xyi - y^2 = -3+4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & \dots(1) \\ 2xy = 4 & \dots(2) \end{cases}$$

من (٢) نجد : $x = \frac{2}{y} \dots *$ نعوض في (١) :

$$\frac{4}{y^2} - y^2 = -3$$

$$4 - y^4 = -3y^2$$

$$\Rightarrow \quad y^4 - 3y^2 - 4 = 0$$

وهي معادلة حقيقية نحلها على ال Δ :

$$\Delta = 9 + 16 = 25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$y_1{}^2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \Rightarrow \begin{cases} y'_1 = +2 \\ y'_2 = -2 \end{cases}$$

$y_2{}^2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{2} = -1$: مرفوض لأن مربع عدد حقيقي لا يساوي عدد سالب

نعوض في *:

$$y'_1 = +2 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = 1 + 2i$$

$$y'_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = -1 - 2i$$

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\delta_1}}{2a} = \frac{1-4i+1+2i}{2} = 1 - i$$

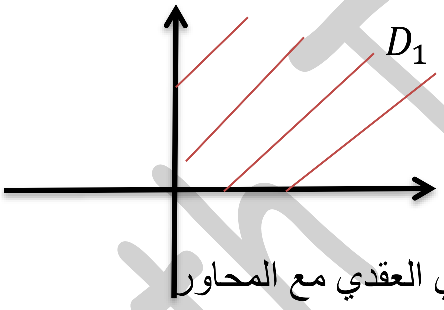
$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\delta_2}}{2a} = \frac{1-4i-1-2i}{2} = -3i$$

تمرين وظيفة : لتكن المعادلة : $(1+i)z^2 + 4z + 5 = 0$

احسب: $z_1{}^3 + z_2{}^3 \, , z_1{}^2 + z_2{}^2 \, , \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ دون إيجاد الجذور.

أوجد المجموعة النقطية الممثلة للمجموعة :

(١) $D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : 0 \le Arg z \le \frac{\pi}{2} \right\}$



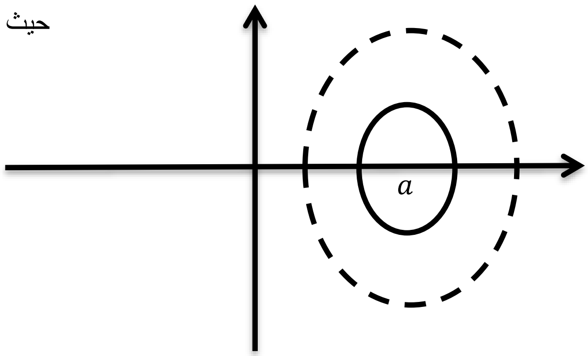
أي هي الربع الأول من المستوي العقدي مع المحاور

(٢) $D_2 = \{ z \in \mathbb{C} \ : r_1 \le |z - a| < r_2 \}$

إن $|z - a| < r_2$ هو قرص دائرة مركزه a ونصف قطره r_1 أي داخل القرص.

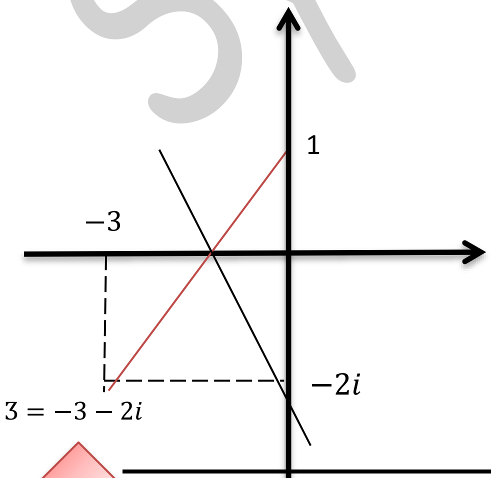
$|z - a| \ge r_1$ اقرص دائري مركزه a ونصف قطره r_2.

حيث a اختيارية



وهي حلقة نصف قطرها الداخلي r_1 ونصف قطرها الخارجي r_2 بدون المحيط الخارجي ومع المحيط الداخلي

(٣) $D_3 = \{ z \in \mathbb{C} \ : |z - i| = |z + 3 + 2i| \}$

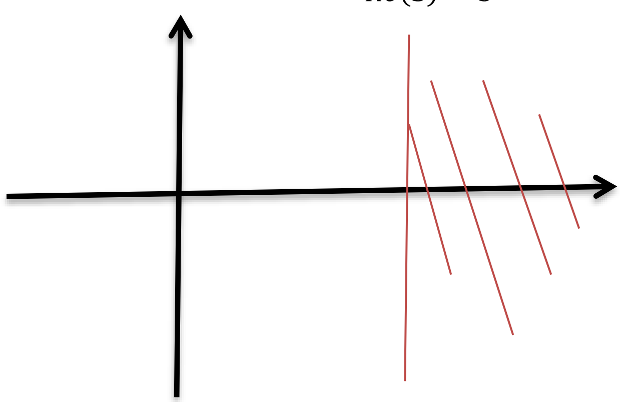


حيث أن المجموعة النقطية تتحدد بأن نأخذ منتصف القطعة المستقيمة

الواصلة بين i و $-3-2i$ ونرسم مستقيم

أي نقطة من المحور تبعد عن طرفي القطعة المستقيمة بعداً متساوياً.

هو محور القطعة المستقيمة والمحور عمودي على المنتصف.



$$D_4 = \{z \in \mathbb{C} \ : Re(z - 2) \geq 1\} \quad (٤)$$

$$Re(z - 2) \geq 1$$

$$Re(z) - Re(2) \geq 1$$

$$Re(2) = 2$$

$$\Rightarrow \quad Re(z) \geq 3$$

وهي تمثل نصف المستوي الواقع على يمين المستقيم $Re(z) = 3$ مع المستقيم .

$$D_5 = \{z \in \mathbb{C} \ : Re(z - 2) = |z|\} \quad (٥)$$

$$Re(z - 2) = |z|$$

$$Re(z) - Re(2) = |z|$$

$$Re(z) = |z| + Re(2)$$

لنفرض أن $z = x + iy$

$$x = \sqrt{x^2 + y^2} + 2$$

$$x - 2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نربع الطرفين : $(x - 2)^2 = x^2 + y^2$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 + y^2$$

$$y^2 = -4x + 4$$

$$y^2 = -4(x - 1)$$

نلاحظ أنها معادلة قطع مكافئ ذروته $(1,0)$

$$x = x_0 - p$$

$$4p = -4 \qquad \Rightarrow \quad p = -1$$

$$\Rightarrow x = x_0 - p \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

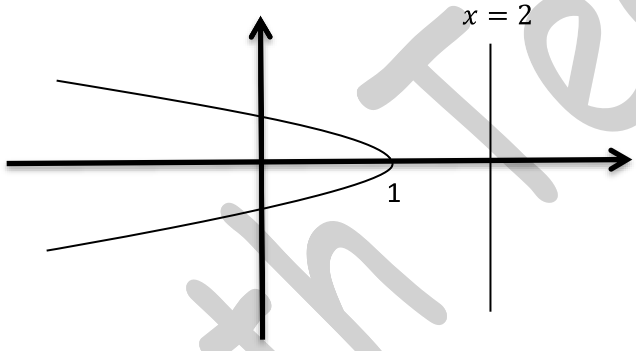
$$F(x_0 + p\,, y_0) = (0,0)$$

وبما أن $|3| \geq 0 \quad \Leftarrow \quad Re(3 - 2) \geq 0$

$$Re(3) \geq 2$$

إذاً المجموعة هي المجموعة الخالية

لأنه حتى تتحقق المساواة يجب أن تكون $|3|$ واقعة على المستقيم وعلى القطع المكافئ.



وظيفة :

ماذا تمثل المجموعة $D_3 = \{3 \in \mathbb{C} \;:\; Re(2 - 3) = |3|\}$ ومثلها في المستوي العقدي .

((سنقوم بحله في المحاضرات القادمة))

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى