المحاضرة 9 + 10

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ عنوان المحاضرة: التمديد المنتهي و التمديد الجبري

2018/10/31 + 25

نظري ☑
عملي ☐

تتمة للسؤال الأخير في المحاضرة الماضية:

- أوجد عناصر $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ على الفضاء الشعاعي $\mathbb{Q}$؟

بما أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ فضاء شعاعي على $\mathbb{Q}$ بعده 4 وقاعدته

$$\{1, (\sqrt{2}+\sqrt{5}), (\sqrt{2}+\sqrt{5})^2, (\sqrt{2}+\sqrt{5})^3\}$$

أي $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5}) ; \exists a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$:

$$\theta = a_0 + a_1(\sqrt{2}+\sqrt{5}) + a_2(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2 + a_3(\sqrt{2}+\sqrt{5})^3$$

ملاحظة: نعلم أن $K(\alpha) \cong \frac{K[x]}{(f(x))}$ حيث $f(x) = irr(\alpha, K)$

بما أن $K(\alpha)$ حقل ولنأخذ $0 \neq p(\alpha) \in K(\alpha)$ نريد إيجاد مقلوب الـ $p(\alpha)$

$\Rightarrow \exists p(x) \in K[x]$

تقابل $p(\alpha)$ ومنه $f(x) \in K[x]$ (غير خزولة) و $p(x)$ بحيث

$$gcd(p(x), f(x)) = h_1(x)p(x) + h_2(x)f(x)$$

وبتبديل كل X بـ x فإن $1 = h_1(x)p(x) + 0$

وبتبديل كل x بـ α نجد $1 = h_1(\alpha).p(\alpha)$

$\Leftarrow$ مقلوب الـ $p(\alpha)$ هو $h_1(\alpha)$.

مبرهنة: ليكن K حقل و α عنصر جبري على K عندها $K(\alpha)$ تمديد منتهي لـ K بدرجة تساوي n وهي درجة $irr(\alpha, K)$ وكل عنصر $\beta \in K(\alpha)$ جبري على K أي $deg(irr(\beta, K)) \leq n$

البرهان: كون α جبري على K فإنه $\exists f(x) \in K[x]; f(\alpha) = 0$ حيث $f(x)$ غير خزولة وإن $f(x) = irr(\alpha, K)$ كذلك

$K(\alpha) \cong \frac{K[x]}{(f(x))}$ تمديد للحقل K بدرجة تساوي n حيث

وليرهن الشق الثاني من المبرهنة $\{deg(f(x)) = n\}$

لنأخذ $\beta \in K(\alpha)$ عندها المجموعة $\{1, \beta, ---, \beta^n\}$ مرتبطة خطياً

(لأن عدد العناصر المجموعة هو $n+1 > n$ من بعد الفضاء n)

$\Rightarrow \exists\, c_0, c_1, ----, c_n \in K : c_0 1 + c_1\beta + ---- + c_n\beta^n = 0$

ومنه $g(X) = c_0 1 + c_1 X + ---- + c_n X^n \in K[X]$ (ليست صفرية)

و $g(\beta) = 0 \Leftarrow \beta$ جبري على K وأن $deg(irr(\beta, K)) \leq n$

حيث $[K[\alpha] : K] = n$

مثال: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ تمديد جبري لأن $\sqrt{2}$ جبري على $\mathbb{Q}$.

* مبرهنة: كل تمديد منتهي هو تمديد جبري.

البرهان: ليكن L/K تمديد منتهي درجته $[L:K] = n < +\infty$

لنأخذ $\beta \in L$ ومنه $\{1, \beta, ----, \beta^n\}$ مرتبطة خطياً ومنه

$\exists\, g(X) = c_0 1 + c_1 X + ---- + c_n X^n \in K[X]$

غير صفرية بحيث $c_0 + c_1\beta + ---- + c_n\beta^n = 0$

$\Leftarrow \beta$ جبري على $K \Leftarrow$ التمديد جبري.

مثال: إن $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ تمديد منتهي فهو جبري بينما

$\bar{\mathbb{Q}} = \{\theta :$ عنصر من $\mathbb{C}$ جبري على $\mathbb{Q}\}$

- $\bar{\mathbb{Q}}$ حقل (سيثبت فيما بعد)

- $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ هو تمديد غير منتهي ولكنه تمديد جبري على $\mathbb{Q}$

من تعريفه وهنا يثبت أن عكس المبرهنة غير صحيح في الضرورة.

∴ سنعتمد في مقررنا على التمديد المنتهي.

ملاحظة: $[L:K] < +\infty \Leftrightarrow$ {توجد $\alpha_1, \alpha_2, ----, \alpha_m$ عناصر جبرية على K حيث $L = K(\alpha_1, ----, \alpha_m)$}

تمرين: [1] أحسب $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}\, i) : \mathbb{Q}] = ?$

$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}] = ?$

[2] أثبت أن $\mathbb{Q}(\sqrt{5}\, i, \sqrt[3]{5}) / \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ منتهي

$\boxed{3}$ أحسب $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}i, \sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}] = ?$ واستنتج $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}i, \sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5}i)]$

$\boxed{4}$ أثبت أن $\mathbb{Q}(\sqrt{5}i, \sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$

الحل: $\boxed{1}$

- $X = \sqrt{5}i \Rightarrow X^2 + 5 = irr(\sqrt{5}i, \mathbb{Q})$

وهي غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ ((حسب ايزنشتاين حيث $p = 5$))

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt{5}i) : \mathbb{Q}] = 2$

- $X = \sqrt[3]{5} \Rightarrow X^3 - 5 = irr(\sqrt[3]{5}, \mathbb{Q})$

وهي غير مختزلة على $\mathbb{Q} \Leftarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}] = 3$

$\boxed{2}$ $X = \sqrt{5}i \Rightarrow X^2 + 5 = irr(\sqrt{5}i, \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}))$

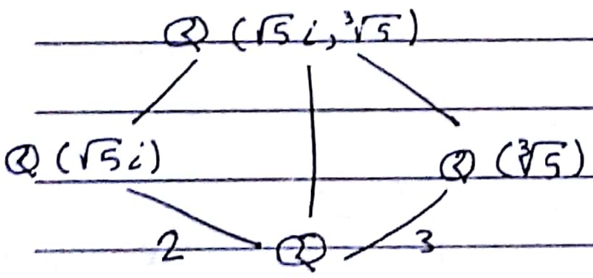
وبما أن الحدودية أصغرية فهي غير مختزلة $\Leftarrow$

$[\mathbb{Q}(\sqrt{5}i, \sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})] = 2$

$\boxed{3}$ نفرض أن $\mathbb{Q}(\sqrt{5}i, \sqrt[3]{5}) = L \Leftarrow [L : \mathbb{Q}] = 2.3 = 6$

وبالتالي $[L : \mathbb{Q}(\sqrt{5}i)] = 3$

الرسم للتوضيح :



$\boxed{4}$ لنثبت أحد الاحتواءين :

$\sqrt[6]{5}i \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i) \Rightarrow (5^{1/6}i)^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i) \Rightarrow -\sqrt[3]{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$

$\Rightarrow \sqrt[3]{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$

وأيضاً $(5^{1/6}i)^3 = -\sqrt{5}i \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i) \Rightarrow \sqrt{5}i \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$

$\Rightarrow L \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$

لندرس درجة التمديد فإذا كانت تساوي 6 فالمساواة محققة

$X = \sqrt[6]{5}i \Rightarrow X^6 + 5 = irr(\sqrt[6]{5}i, \mathbb{Q})$

وهي غير مختزلة لأنها حدودية أصغرية $\Leftarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i) : \mathbb{Q}] = 6$

$\Leftarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i) : L] = 1 \Leftarrow L = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$

((التوضيح))

$$6\left[\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}) \\ \Big|\ 1 \\ \mathbb{Q}(\sqrt{5}\,i,\ \sqrt[3]{5}) \\ \Big|\ 6 \\ \mathbb{Q} \end{array}\right.$$

مبرهنة + ترميز: [1] $F \subset K \subset L$ تمديد حقول عندها

(i) L/F منتهي $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} L/K \text{ منتهي} \\ K/F \text{ منتهي} \end{array}\right\}$

(ii) L/F جبري $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} L/K \text{ جبري} \\ K/F \text{ جبري} \end{array}\right\}$

[2] ليكن L/F و K/F تمديد حقول عندها نعرف LK أصغر الحقول التي تحوي L و K أي $KL = K(L) = L(K)$

عندها • L/F منتهي $\Rightarrow$ KL/K منتهي

• L/F جبري $\Rightarrow$ KL/K جبري

• L/F جبري و K/F جبري $\Rightarrow$ KL/F جبري

البرهان: [1] (i) وضوح لأن $[L:F]=[L:K]\cdot[K:F]$

(ii) $\Leftarrow$ لدينا L/F جبري ولنثبت L/K جبري إذاً لنأخذ $\alpha\in L$ ولنبرهن على وجود $p(x)\in K[x]$ بحيث $p(\alpha)=0$

بما أن $\left\{\begin{array}{l} \alpha\in L \\ L/F \text{ جبري} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\exists\, p(x)\in F(x) : p(\alpha)=0$

نلاحظ أن $p(x)\in F(x)\subseteq K[x]$

$\Leftarrow$ L/K جبري. وأيضاً لدينا L/F جبري ولنثبت K/F جبري إذاً لنأخذ $\beta\in K$ ولنبرهن على وجود $p(x)\in F[x]$ بحيث $p(\beta)=0$

بما أن $\beta\in K$ إذاً $\beta\in L$ وبالتالي من كون L/F جبري فإن β جبري على F $\Leftarrow$ K/F جبري.

$\Rightarrow$ لنفرض أن L/K جبري و K/F جبري ولنثبت أن L/F جبري.

لتكن $\alpha\in L$ ولنبرهن على وجود $p(x)\in F[x]$ بحيث $p(\alpha)=0$

بما أن $L|K$ جبري و $\alpha\in L$ إذاً $\exists\, g(X)\in K[X];\ g(\alpha)=0$

$\Rightarrow g(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0\in K[X]$

لنفرض $K'=F(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$

- بما أن $K'|F$ تمديد منتهي (لأنه تمديد للحقل F بواسطة عدد منتهي من العناصر الجبرية على F لأن $K|F$ جبري)
- كذلك α جبرية على K' لأن $g(X)\in K[X];\ g(\alpha)=0$

إذاً $K'(\alpha)|K'$ تمديد منتهي

- بما أن $\left\{\begin{array}{l} K'(\alpha)|K' \text{ منتهي} \\ K'|F \text{ منتهي}\end{array}\right.$ $\Rightarrow K'(\alpha)|F$ منتهي $\Rightarrow K'(\alpha)|F$ جبري

$\Leftarrow K'(\alpha)|F$ جبري أي كل عنصر من $K'(\alpha)$ جبري على F إذاً $\alpha\in K'(\alpha)$ جبري على F.

ملاحظة: إذا كان لدينا $K(\alpha,\beta)=L$

$$\begin{tikzcd} & K(\alpha,\beta)=L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ K(\alpha) \arrow[dr, dash, "n"'] & & K(\beta) \arrow[dl, dash, "m"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

حيث n,m أعداد أولية فيما بينها

فإن:

$[L,K]=n.m\ ,\ [L,K(\alpha)]=m\ ,\ [L,K(\beta)]=n$

تمرين:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q}(j,\sqrt[3]{2}) \arrow[dl, dash, "?"'] \arrow[dr, dash, "?"] \arrow[dd, dash, "?"] & \\ \mathbb{Q}(j) \arrow[dr, dash, "?"'] & & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dl, "?"] \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

1- أوجد درجات تمديد ?

2- $[\mathbb{Q}(j,\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=?$

الحل: 1- • $\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}$

$irr(j,\mathbb{Q})=X^2+X+1\in\mathbb{Q}[X]$

وهي غير قابلة للاختزال على $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow [\mathbb{Q}(j):\mathbb{Q}]=2$

• $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$

$X = \sqrt[3]{2} \Rightarrow irr(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = X^3 - 2$

وهو غير قابل للتفكيك على $\mathbb{Q}$ حسب أيزنشتاين حيث $p=2$

$\Longrightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$

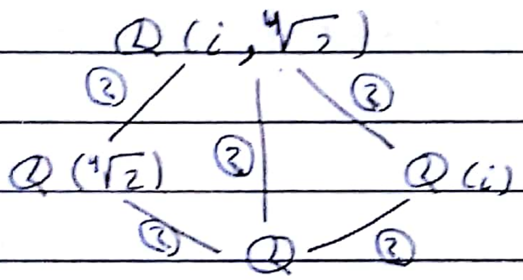
• كون 2,3 أوليين فيما بينهما فإن $[\mathbb{Q}(j,\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 6$

$[\mathbb{Q}(j,\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}(j)] = 3$, $[\mathbb{Q}(j,\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] = 2$

$X = j\sqrt[3]{2} \Rightarrow irr(\sqrt[3]{2}\, j, \mathbb{Q}) = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ $\boxed{2}$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(j\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$

تمرين:



١- أحسب درجة تمديد $\mathbb{Q}$

٢- $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\, i) : \mathbb{Q}] = ?$

الحل: $\boxed{1}$ • $X = i \Rightarrow irr(i, \mathbb{Q}) = X^2 + 1$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$

• $X = \sqrt[4]{2} \Rightarrow irr(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}) = X^4 - 2$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4$

• كون $i \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \Leftarrow irr(i, \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})) = X^2 + 1$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})] = 2$

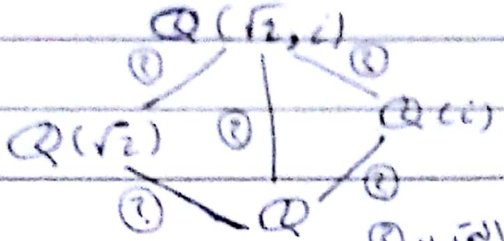
$[\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(i)] = 4$, $[\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{2}), \mathbb{Q}] = 4+2 = 8$

$\boxed{2}$ $X = \sqrt[4]{2}\, i \Rightarrow X^4 = 2$

$\Rightarrow irr(\sqrt[4]{2}\, i, \mathbb{Q}) = X^4 - 2$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\, i) : \mathbb{Q}] = 4$

تمرين وظيفة

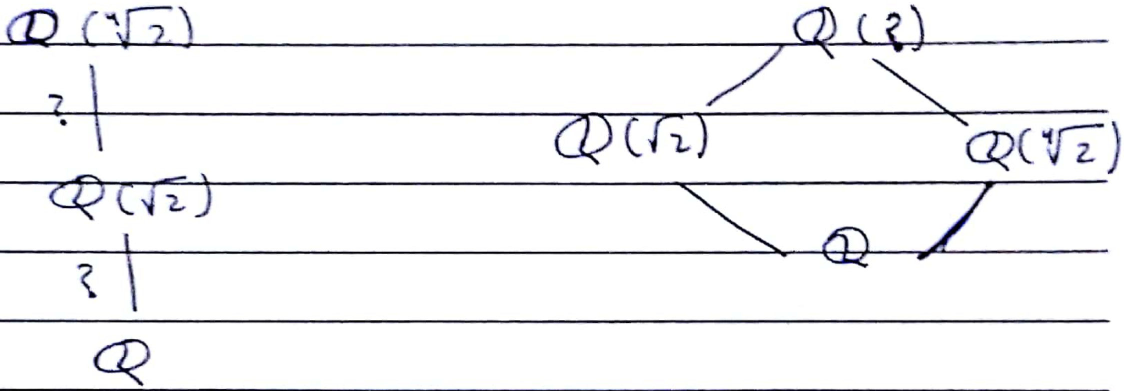


1) أحسب درجات التمديد ؟

2) أثبت أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i)=\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$

3) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},i),\mathbb{Q}] = ?$

تمرين وظيفة: أحسب درجات التمديد ؟



انتهت المحاضرة

إعداد: رشيد الحايك البوشي

يقول غاوس (عن الرياضيات):
إن السحر الآخاذ لهذا العلم السامي لا يمكن أن يفصح عن جماله إلا لأولئك الذين يتعمقون فيه :)