◄دكتورة المادة: رشا بعاج

◄المحاضرة: العاشرة العنوان: الاستيفاء بكثيرات الحدود

مرحبا اصدقائي: نكمل معكم زملائي بحثنا الذي كان بعنوان "الاستيفاء بكثيرات الحدود"

١. طريقة لاغرانج.

٢. طريقة نيوتن.

لنبدأ: الطريقة الثانية (طريقة نيوتن): بفرض لدينا $n+1$ نقطة متمايزة، عندها تكون كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة نيوتن هي كثيرة حدود $p_n(x)$ وهي كثيرة حدود من الدرجة n

بناءً على بعض الاستنتاجات وصلنا إلى هذه العلاقة :

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \dots\dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_{n-1})$$

$$p_n(x_i) = y_i \qquad , i = 0,1,2,3,\dots$$

$$p_n(x_0) = y_0 \Rightarrow a_0 = y_0$$

$$p_n(x_1) = y_1 \Rightarrow a_0 + a_1(x_1-x_0) = y_1$$

$$y_0 + a_1(x_1-x_0) = y_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

$$p_n(x_2) = y_2 \Rightarrow a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = y_2$$

$$\Rightarrow y_0 + \frac{(y_1-y_0)(x_2-x_0)}{x_1-x_0} + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = y_2$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - \frac{(y_1-y_0)(x_2-x_0)}{x_1-x_0}}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}$$

تنويه: إذا أضفنا النقطة (x_{n+1}, y_{n+1}) ستضاف إلى الحدودية فتصبح الحدودية

$$p_{n+1}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$\dots\dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots\dots(x - x_{n-1}) + a_{n+1}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots\dots(x - x_n)$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	x_0	a_0 y_0			
			$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ a_1		
1	x_1	y_1		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$ a_2	
			$f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$ a_3
2	x_2	y_2		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
			$f[x_2, x_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		
3	x_3	y_3			

$$\boldsymbol{p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots}$$
$$\boldsymbol{+ a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})}$$

مثال : لتكن البيانات أو النقاط التالية : استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حدودية الاستيفاء من الدرجة الرابعة:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	5	7	8	10
$f(x_i)$	0	2	-1	-2	20

الحل :

$$p_4(x) = a_0 + a_1(x)(x - 5) + a_3(x)(x - 5)(x - 7) + a_4(x)(x - 5)(x - 7)(x - 8)$$

ملاحظة : وحتى يتم المطلوب فإنه يتوجب علينا تعيين a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 لذا نقوم ببناء جدول الفروق المقسومة كما يلي:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	0	a_0 0				
			$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2-0}{5-0} = 0{,}4$ a_1			
1	5	2		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-1{,}5-0{,}4}{7-0} = -0{,}271$ a_2		
			$f[x_2, x_1] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{-1-2}{7-5} = -1{,}5$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{0{,}167+0{,}271}{8-0} = 0{,}0548$ a_3	
2	7	-1		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-1+1{,}5}{8-5} = -0{,}167$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ a_4 $= \frac{0{,}767 - 0{,}0548}{10 - 0} = 0{,}0712$
			$f[x_3, x_2] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-2+1}{8-7} = -1$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{4 - 0.167}{10 - 5} = 0{,}767$	
3	8	-2		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{11 + 1}{10 - 7} = 4$		
			$f[x_4, x_3] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} = \frac{20 + 2}{10 - 8} = 11$			
4	10	20				

القانون عليه علامات

$$p_4(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

نعوّض: $a_0 = 0, a_1 = 0{,}4, a_2 = -0{,}271, a_3 = 0{,}0548, a_4 = 0{,}0712$

$$
\begin{aligned}
p_4(x) = 0 + 0{,}4(x-0) - 0{,}271(x-0)(x-5) \\
+ 0{,}0548(x-0)(x-5)(x-7) \\
+ 0{,}0712(x-0)(x-5)(x-7)(x-8) \\
= 0{,}4x - 0{,}271x(x-5) + 0{,}0548x(x-5)(x-7) \\
+ 0{,}0712x(x-5)(x-7)(x-8) \\
= x[0{,}4 + (x-5)(-0{,}271) + (x-7)(0{,}0584) + (x-8)(0{,}0712)]
\end{aligned}
$$

- **الخطأ الأعظمي المرتكب في طريقة نيوتن: (طريقة نيوتن لها شكلين للخطأ)**

١) الطريقة الأولى : هو نفس قانون الخطأ الأعظمي المرتكب بطريقة لاغرانج $E_{max} = \left|\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} \cdot f_{(\theta)}^{(n+1)}\right|$

2)الطريقة الثانية : لدينا النقاط $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ عددها (n+1) نقطة .

نحتاج نقطة إضافية $(x_{n+1},y_{(n+1)})$ يصبح عدد النقاط $(n+2)$

$$p_{n+1}(x) = a_0 + a \dots\dots\dots\dots + a_{n-1}(x-x_0)\dots\dots(x-x_n)$$

$$E_{max} = \mathrm{a}_{n+1} \ , p_{n+1}$$

$$\left|\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta)\right| = |a_{n+1} \cdot p_{n+1}| \Rightarrow \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} = a_{n+1} \Rightarrow f^{n+1}(\theta) = a_{n+1}(n+1)!$$

ومن الطريقة الثانية لل E_{max} استطعنا إيجاد قيمة المشتق من المرتبة $(n+1)$ دون أن نعرف الدالة والنقطة

كيف يأتي السؤال :بفرض أن النقطة (...،....) أوجد القيمة العظمى للمشتق ؟(دون معرفتنا للدالة)

تمرين: لتكن لدينا البيانات التالية :

أوجد كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة نيوتن ثم احسب $f(1{,}5)$ (أي أوجد الدالة عند النقطة 1,5

x_i	0	1	2	3
y_i	0	1	8	27

الحل:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	0	0 a_0			
			$\frac{1-0}{1-0} = 1$ a_1		
1	1	1		$\frac{7-1}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$ a_2	
			$\frac{8-1}{2-1} = 7$		$\frac{6-3}{3-0} = 1$ a_3
2	2	8		$\frac{19-7}{3-1} = \frac{12}{2} = 6$	
			$\frac{27-8}{3-2} = 19$		
3	3	27			

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$\dots \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots \dots (x - x_{n-1})$$

$$p_3(x) = 0 + 1(x - 0) + 3(x - 0)(x - 1) + 1(x - 0)(x - 1)(x - 2)$$
$$= x + 3x(x - 1) + x(x - 1)(x - 2)$$

$$f(1,5) = p_3(1,5) \cong 3,375$$

"انتهت المحاضرة"

إعداد: دعاء الرحيل & مرح غريب & ماريا عبيد