المحاضرة السابعة + الثامنة

◄ دكتور المادة: خالد ضنيفس

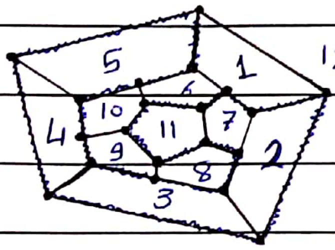
◄ عنوان المحاضرة: بيان هاملتون ومسألة السياحة العالمية

نظري ☑
عملي ☐

Hamulton Graph بيان هاملتون

دائرة هاملتون: تعريف: هي دائرة تمر بجميع عقد البيان دون تكرار أي عقدة.

مثال: البيان التالي بيان مستوٍ ذو 12 وجه:



مسار هاملتون: هو مسار يمر بجميع العقد (ليس دائرة)

ملاحظة: يمكن للبيان أن يحوي دائرة هاملتون أو مسار هاملتون أو لا يحوي أياً منهما. إذا كان يحوي دائرة هاملتون فهو بيان هاملتون، وإذا كان يحوي مسار هاملتون فهو بيان نصف هاملتون.

دائرة أويلر: هي دائرة تمر بجميع أضلاع البيان دون تكرار الأضلاع (يمكن تكرار العقد).

مسار أويلر: هو مسار يمر بجميع أضلاع البيان (يمكن تكرار العقد)

ملاحظات:

1- البيان الذي يحوي مسار أويلر هو نصف أويلر، والبيان الذي يحوي دائرة أويلر هو بيان أويلر.

2- يمكن للبيان أن يحوي أكثر من دائرة هاملتون، ويمكن أن يحوي دائرة واحدة، كما يمكن أن يحوي أكثر من دائرة من دوائر أويلر ويمكن أن يحوي دائرة واحدة.

3- يمكن أن يكون البيان بيان هاملتون وبيان أويلر في الوقت نفسه، ويمكن أن يكون بيان هاملتون فقط أو بيان أويلر فقط، أو ليس بيان أويلر ولا بيان هاملتون.

البيان الموزون: هو بيان زوّدت أضلاعه بقيم، وهذه القيم تمثل (كلفة نقل - كلفة إنشاء - كلفة صيانة .....)

كلفة دارة هاملتون: هي مجموع كلفة الأضلاع التي تنتمي لهذه الدارة.

من بين مجموعة دوائر هاملتون نختار دارة هاملتون ذات الكلفة الأصغرية.

- من أهم تطبيقات دارة هاملتون:

- Travel world problem — مشكلة السياحة العالمية.
- Postman problem — مسألة ساعي البريد.
- Salesman problem — مسألة البائع الجوال.

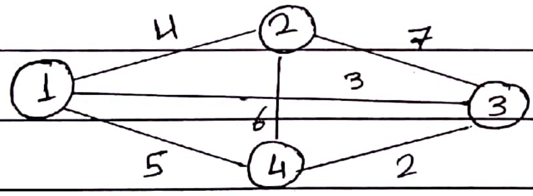
Algorithm of Travel world problem

خوارزمية مسألة السياحة العالمية

1- Find the matrix of graph

أوجد مصفوفة البيان.

مثال: (في نص السؤال إما يعطينا البيان أو المصفوفة)



المصفوفة: (ضمن العقدة نفسها نضع ∞)

$$M = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 3 & 5 \\ 4 & \infty & 7 & 6 \\ 3 & 7 & \infty & 2 \\ 5 & 6 & 2 & \infty \end{bmatrix}$$

2- Find the matrix M' from the matrix M by applying the following rule:

أوجد المصفوفة M' اعتماداً على المصفوفة M من خلال تطبيق القاعدة التالية:

$$\boxed{\begin{aligned} u_i &= \min_j d_{ij} \\ v_j &= \min_i (d_{ij} - u_i) \\ d'_{ij} &= \min_j (d_{ij} - u_i - v_j) \end{aligned}}$$

3- Part the matrix M' into matrix S_1, S_2 :

جزئ المصفوفة M' إلى مصفوفتين S_1, S_2.

4- Find the minimal cost

أوجد الكلفة الأصغرية.

(A) Find the edge of Hamulton circle

أوجد الضلع من دارة هاملتون، وذلك من خلال العلاقة:

$$\boxed{w_{rs} = \min_{r \neq k} d_{rk} + \min_{k \neq s} d_{ks}}$$

5- Test : in the last vertex

if not : go to step (2)

اختبر إن كانت العقدة النهائية، إذا لم تكن كذلك اذهب إلى الخطوة (2)

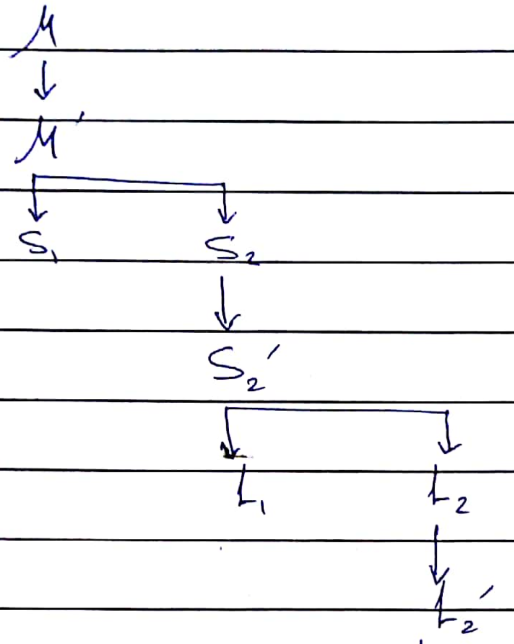
تحسب الكلفة من العلاقة التالية:

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j}$$

توضيح الخوارزمية بالشكل:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d] & \\ & M' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ S_1 & & S_2 \end{tikzcd}$$

نوجد كلفة كل من S_1 , S_2 ، بفرض أننا وجدنا أن كلفة S_2 هي الأصغر :



وهكذا حتى نحصل على دائرة هاملتون.

مثال: ليكن لدينا البيان الممثل بالمصفوفة:

$$
M = D = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
\infty & 6 & 6 & 8 & 5 & 7 \\
3 & \infty & 5 & 12 & 4 & 10 \\
4 & 5 & \infty & 15 & 10 & 7 \\
6 & 7 & 3 & \infty & 6 & 3 \\
8 & 6 & 8 & 10 & \infty & 8 \\
9 & 4 & 2 & 7 & 5 & \infty \\
\hline
v_1=0 & v_2=0 & v_3=0 & v_4=3 & v_5=0 & v_6=0
\end{array}
\begin{array}{l} \\ u_1=5 \\ u_2=3 \\ u_3=4 \\ u_4=3 \\ u_5=6 \\ u_6=2 \\ \\ \end{array}
$$

لنحسب u_i , v_j حيث:

$$u_i = \min_j \{d_{ij}\}$$

$$v_j = \min_i \{d_{ij} - u_i\}$$

$$u_1 = \min\{\infty, 6, 6, 8, 5, 7\} = 5$$

$$u_2 = \min\{3, \infty, 5, 12, 4, 10\} = 3$$

$$u_3 = \min\{4, 5, \infty, 15, 10, 7\} = 4$$

$u_4 = \min\{6, 7, 3, \infty, 6, 3\} = 3$

$u_5 = \min\{8, 6, 8, 10, \infty, 8\} = 6$

$u_6 = \min\{9, 4, 2, 7, 5, \infty\} = 2$

$v_1 = \min\{\infty - 5, 3-3, 4-4, 6-3, 8-6, 9-2\}$

$= \min\{\infty, 0, 0, 3, 2, 7\} = 0$

$v_2 = \min\{6-5, \infty - 3, 5-4, 7-3, 6-6, 4-2\}$

$= \min\{1, \infty, 1, 4, 0, 2\} = 0$

$v_3 = \min\{1, 2, \infty, 0, 2, 0\} = 0$

$v_4 = \min\{3, 9, 11, \infty, 4, 5\} = 3$

$v_5 = \min\{0, 1, 6, 3, \infty, 3\} = 0$

$v_6 = \min\{2, 7, 3, 0, 2, \infty\} = 0$

- لنحسب الكلفة الابتدائية:

$C = \sum_{i=1}^{6} u_i + \sum_{j=1}^{6} v_j$

$= 5+3+4+3+6+2+0+0+0+3+0+0 = 26$

- الآن نوجد المصفوفة M' (أو D_0) من العلاقة:

$d_{ij}' = \min_i\{d_{ij} - u_i - v_j\}$

$d_{11}' = d_{11} - u_1 - v_1 = \infty - 5 - 0 = \infty$

$d_{12}' = d_{12} - u_1 - v_2 = 6 - 5 - 0 = 1$

$d_{13}' = d_{13} - u_1 - v_3 = 6 - 5 - 0 = 1$

$d_{14}' = d_{14} - u_1 - v_4 = 8 - 5 - 3 = 0$

$d_{15}' = d_{15} - u_1 - v_5 = 5 - 5 - 0 = 0$

$d_{16}' = d_{16} - u_1 - v_6 = 7 - 5 - 0 = 2$

وهكذا بنفس الطريقة نوجد باقي عناصر المصفوفة.

فتصبح كما يلي:

$$M' = D_0 = \begin{array}{c|cccccc} & ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \\ \hline ① & \infty & 1 & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 2 \\ ② & \boxed{0} & \infty & 2 & 6 & 1 & 7 \\ ③ & \boxed{0} & 1 & \infty & 8 & 6 & 3 \\ ④ & 3 & 4 & \boxed{0} & \infty & 3 & \boxed{0} \\ ⑤ & 2 & \boxed{0} & 2 & 1 & \infty & 2 \\ ⑥ & 7 & 2 & \boxed{0} & 2 & 3 & \infty \end{array}$$

- نجد كل صفر في المصفوفة D_0 سيكون يمثل ضلعاً مرشحاً من دارة هاملتون.

- نختار الضلع الذي يحقق العلاقة:

$$W_{rs} = \underbrace{\min_{r \neq k} d_{rk}}_{\substack{\text{أصغر عنصر في السطر } r \\ \text{دون العنصر } d_{rs}}} + \underbrace{\min_{k \neq s} d_{ks}}_{\substack{\text{أصغر عنصر في العمود } s \\ \text{دون العنصر } d_{rs}}}$$

- نطبق العلاقة السابقة بالنسبة لكل صفر في المصفوفة:

$W_{14} = 0 + 1 = 1$

- حيث الصفر أصغر عنصر في السطر والواحد أصغر عنصر في العمود بالنسبة للعنصر $d_{14} = 0$ (دون أخذ هذا العنصر)

- وبنفس الطريقة:

$W_{15} = 0 + 1 = 1$

$W_{21} = 1 + 0 = 1$

$W_{31} = 1 + 0 = 1$

$W_{43} = 0 + 0 = 0$

$W_{46} = 0 + 2 = 2$

$W_{52} = 1 + 1 = 2$

$W_{63} = 2 + 0 = 2$

- نختار ما يسبق العنصر الموافق لأعظم قيمة فيكون أول ضلع في دارة هاملتون.

هنا نختار إما W_{46} أو W_{52} أو W_{63}

ولنختر مثلاً W_{52} ، أي أخذنا الضلع $(5,2) = 2$

$$⑤ \longrightarrow ②$$

- ولنضع المجموعتين r', r'' حيث r'' تحوي الأضلاع المختارة و r' تحوي نظائرها فيكون:

$\{(\overline{5,2})\} \subseteq r'$, $\{(5,2)\} \subseteq r''$

- الآن نجزئ المصفوفة D_0 إلى مصفوفتين، المصفوفة الأولى D_0' والثانية D_0'' كما يلي:

المصفوفة الأولى: نستبدل فيها قيمة العنصر الموافق للضلع المختار بـ ∞ أي $d_{52} = \infty$

المصفوفة الثانية: هي مصفوفة ناتجة من المصفوفة الأصلية بعد حذف السطر الخامس والعمود الثاني مع تبديل قيمة نظير الضلع المختار بـ ∞، أي $d_{25} = \infty$

فتكون المصفوفة الأولى:

$$D_0' = \begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & \infty & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & u_1 = 0 \\ 2 & 0 & \infty & 2 & 6 & 1 & 7 & u_2 = 0 \\ 3 & 0 & 1 & \infty & 8 & 6 & 3 & u_3 = 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & \infty & 3 & 0 & u_4 = 0 \\ 5 & 2 & \boxed{\infty} & 2 & 1 & \infty & 2 & u_5 = 1 \\ 6 & 7 & 2 & 0 & 2 & 3 & \infty & u_6 = 0 \\ \hline & v_1 = 0 & v_2 = 1 & v_3 = 0 & v_4 = 0 & v_5 = 0 & v_6 = 0 & \end{array}$$

والمصفوفة الثانية:

$$D_0'' = \begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & \infty & 1 & 0 & 0 & 2 & u_1 = 0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & \boxed{\infty} & 7 & u_2 = 0 \\ 3 & 0 & \infty & 8 & 6 & 3 & u_3 = 0 \\ 4 & 3 & 0 & \infty & 3 & 0 & u_4 = 0 \\ 6 & 7 & 0 & 2 & 3 & \infty & u_5 = 0 \\ \hline & v_1 = 0 & v_2 = 0 & v_3 = 0 & v_4 = 0 & v_5 = 0 & \end{array}$$

- نوجد u_i, v_j لكل من المصفوفتين من خلال العلاقتين:

$u_i = \min\{d_{ij}\}$, $v_j = \min\{d_{ij} - u_i\}$

- نحسب الكلفة لكل من المصفوفتين:

((C هي التكلفة القديمة)) :

$C_0' = C + \sum u_i + \sum v_j$

$= 26 + 1 + 1 = 28$

$C_0'' = C + \sum u_i + \sum v_j$

$= 26 + 0 + 0 = 26$

- نأخذ المصفوفة ذات التكلفة الأقل، وهي D_0''، ونطبق عليها الخوارزمية:

نوجد عناصرها من العلاقة: $d_{ij}' = \min\{d_{ij} - u_i - v_j\}$

فنحصل على المصفوفة:

$$D_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{0} & 2 & 6 & \infty & 7 \\ \boxed{0} & \infty & 8 & 6 & 3 \\ 3 & \boxed{0} & \infty & 3 & \boxed{0} \\ 7 & \boxed{0} & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

- نحدد الأصفار كما سبق ونطبق العلاقة:

$$w_{rs} = \min_{r \neq k} d_{rk} + \min_{k \neq s} d_{ks}$$

أصغر قيمة في العمود + أصغر قيمة في السطر عدا الصفر المأخوذ

$w_{14} = 0 + 2 = 2$ $\quad$ $w_{15} = 0 + 3 = 3$

$w_{21} = 2 + 0 = 2$ $\quad$ $w_{31} = 3 + 0 = 3$

$w_{43} = 0 + 0 = 0$ $\quad$ $w_{46} = 0 + 2 = 2$

$w_{63} = 2 + 0 = 2$

نأخذ أعظم قيمة وهي $w_{31} = 3$ ، أي نختار الضلع $(3, 1)$

$\{\overline{(5,2)}, \overline{(3,1)}\} \subseteq r_1'$ $\quad$ 5 → 2

$\{(5,2), (3,1)\} \subseteq r_1''$ $\quad$ 3 → 1

((أو أن نأخذ $w_{15} = 3$ ، أي الضلع $(1, 5)$

ونتابع الحل بنفس الأسلوب)) $\quad$ 1 → 5 → 2

Scanned by CamScanner

نقسم المصفوفة D_1 إلى مصفوفتين :

المصفوفة الأولى D_1' نستبدل فيها العنصر $d_{31}=0$ بـ ∞ ((أي نضع $(3,1)=\infty$))

المصفوفة الثانية D_1'' نحذف السطر الثالث والعمود الأول ونستبدل نظير العنصر بـ ∞ ((أي نضع $(1,3)=\infty$))

$$D_1' = \begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & \infty & 1 & 0 & 0 & 2 & u_1=0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & \infty & 7 & u_2=0 \\ 3 & \boxed{\infty} & \infty & 8 & 6 & 3 & u_3=3 \\ 4 & 3 & 0 & \infty & 3 & 0 & u_4=0 \\ 6 & 7 & 0 & 2 & 3 & \infty & u_5=0 \\ \hline & v_1=0 & v_2=0 & v_3=0 & v_4=0 & v_5=0 & \end{array}$$

$$D_1'' = \begin{array}{c|cccc|c} & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & \boxed{\infty} & 0 & 0 & 2 & u_1=0 \\ 2 & 2 & 6 & \infty & 7 & u_2=2 \\ 4 & 0 & \infty & 3 & 0 & u_3=0 \\ 6 & 0 & 2 & 3 & \infty & u_4=0 \\ \hline & v_1=0 & v_2=0 & v_3=0 & v_4=0 & \end{array}$$

- نوجد u_i و v_j لكل من المصفوفتين من خلال

$$u_i = \min_j \{d_{ij}\}$$
$$v_j = \min_i \{d_{ij} - u_i\}$$

ملاحظة : في الامتحان نعوض مباشرة على المصفوفة .

- نحسب الكلفة لكل من المصفوفتين : (الحالة القديمة)

$$C_1' = C_0'' + \sum u_i + \sum v_j$$
$$= 26 + 3 + 0 = 29$$
$$C_1'' = C_0'' + \sum u_i + \sum v_j$$
$$= 26 + 2 + 0 = 28$$

نختار المصفوفة ذات الكلفة الأقل، وهي هنا المصفوفة D_1''، ونطبق عليها الخوارزمية:

$$D_2 = \begin{array}{c|cccc|} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & \infty & \boxed{0} & \boxed{0} & 2 \\ 2 & \boxed{0} & 4 & \infty & 5 \\ 4 & \boxed{0} & \infty & 3 & \boxed{0} \\ 6 & \boxed{0} & 2 & 3 & \infty \end{array}$$

نثبت الأصفار على المصفوفة ونطبق القانون:

$$w_{rs} = \min_{r \neq k} d_{rk} + \min_{k \neq s} d_{ks}$$

$w_{14} = 0 + 2 = 2$ $\qquad$ $w_{15} = 0 + 3 = 3$

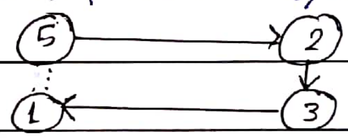
$w_{23} = 4 + 0 = 4$ $\qquad$ $w_{43} = 0 + 0 = 0$

$w_{46} = 0 + 2 = 2$ $\qquad$ $w_{63} = 2 + 0 = 2$

نختار الضلع الموافق لأعظم قيمة وهو $w_{23} = 4$، فيكون:

$\{(\overline{5,2}), (\overline{3,1}), (\overline{2,3})\} \leq r'$

$\{(5,2), (3,1), (2,3)\} \leq r''$



<u>ملاحظة</u>: نحذف الضلع الذي يناقض تعريف دائرة هاملتون (دائرة تمر بجميع عقد البيان)
وفي هذه الحالة سنحذف الضلع $(1,5)$ لأن هذا الضلع يغلق الدائرة، وهذه الدائرة لا تمر بجميع عقد البيان. ((في المصفوفة الثانية)).

- نقسم المصفوفة D_2 إلى مصفوفتين:

المصفوفة الأولى D_2': نستبدل فيها $d_{23} = 0$ بـ ∞

والمصفوفة الثانية D_2'': نحذف السطر الثاني والعمود الثالث ونضع $d_{15} = \infty$ لأن الضلع $(1,5)$ يغلق الدائرة كما في الملاحظة السابقة.

<u>ملاحظة</u>: هنا نظير العنصر غير موجود بسبب حذف الأسطر والأعمدة، ولو وجد لاستبدلنا قيمته بـ ∞.

- ونحسب u_i, v_j لكل من المصفوفتين ونعوض مباشرة على المصفوفة.

$$D_2' = \begin{array}{c|cccc|c} & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & \\ \hline ① & \infty & 0 & 0 & 2 & u_1=0 \\ ② & \boxed{\infty} & 4 & \infty & 5 & u_2=4 \\ ④ & 0 & \infty & 3 & 0 & u_3=0 \\ ⑥ & 0 & 2 & 3 & \infty & u_4=0 \\ \hline & v_1=0 & v_2=0 & v_3=0 & v_4=0 & \end{array}$$

$$D_2'' = \begin{array}{c|ccc|c} & ④ & ⑤ & ⑥ & \\ \hline ① & 0 & \boxed{\infty} & 2 & u_1=0 \\ ④ & \infty & 3 & 0 & u_2=0 \\ ⑥ & 2 & 3 & \infty & u_3=2 \\ \hline & v_1=0 & v_2=1 & v_3=0 & \end{array}$$

- نحسب v_j , u_i ونعوض على المصفوفة

ثم نوجد الكلفة لكل من المصفوفتين :

الكلفة القديمة

$$C_2' = C_1'' + \sum u_i + \sum v_j$$
$$= 28 + 4 + 0 = 32$$
$$C_2'' = C_1'' + \sum u_i + \sum v_j$$
$$= 28 + 2 + 1 = 31$$

- نختار المصفوفة ذات الكلفة الأقل وهي D_2'' ، ونطبق عليها الخوارزمية .

$$D_3 = \begin{array}{c|ccc|} & ④ & ⑤ & ⑥ \\ \hline ① & \boxed{0} & \infty & 2 \\ ④ & \infty & 2 & \boxed{0} \\ ⑥ & \boxed{0} & \boxed{0} & \infty \\ \hline \end{array}$$

نحدد الأصفار على المصفوفة ونطبق العلاقة ، $W_{rs} = \min\limits_{r \neq k} d_{rk} + \min\limits_{k \neq s} d_{ks}$

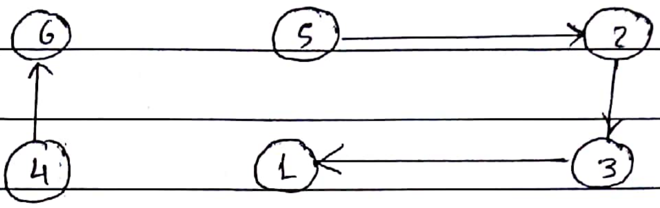
فنجد :

$$W_{14} = 2 \; , \; W_{46} = 4 \; , \; W_{64} = 0 \; , \; W_{65} = 2$$

نختار الضلع الموافق لأعظم قيمة $w_{46}=4$ ، وإذاً الضلع $(4,6)$ ، فيصبح:

$\{\overline{(5,2)}, \overline{(1,3)}, \overline{(2,3)}, \overline{(4,6)}\} \subseteq r'$

$\{(5,2), (1,3), (2,3), (4,6)\} \subseteq r''$



الآن نقسم المصفوفة D_3 إلى مصفوفتين:

المصفوفة الأولى: نستبدل فيها قيمة $d_{46}=0$ بـ ∞

المصفوفة الثانية: نحذف فيها السطر الرابع والعمود السادس ونستبدل نظير العنصر (أي $d_{64}=0$) بـ ∞ .

ملاحظة: هنا لا يوجد ضلع يغلق دارة مع ما ملتوي، لذلك استبدلنا قيمة النظير به فقط

$$D_3' = \begin{array}{c} \\ ① \\ ④ \\ ⑥ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \infty & 2 \\ \infty & 2 & \boxed{\infty} \\ 0 & 0 & \infty \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1=0 & v_2=0 & v_3=2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1=0 \\ u_2=2 \\ u_3=0 \end{array}$$

$$D_3'' = \begin{array}{c} \\ ① \\ ⑥ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} v_1=0 & v_2=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1=0 \\ u_2=0 \end{array}$$

نحسب u_i , v_j ونعوضها على المصفوفتين، ثم نحسب الكلفة لكل من المصفوفتين:

$C_3' = C_2'' + \sum u_i + \sum v_j$

$= 31 + 2 + 2 = 35$

$C_3'' = C_2'' + \sum u_i + \sum v_j$

$= 31 + 0 + 0 = 31$

نختار المصفوفة ذات الكلفة الأقل وهي D_3'' ونطبق عليها الخوارزمية:

$$D_4 = \begin{array}{c|cc} & 4 & 5 \\ \hline 1 & \boxed{0} & \infty \\ 6 & \infty & \boxed{0} \end{array}$$

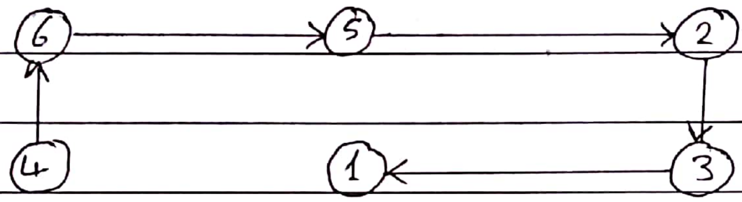
نحدد الأصفار على المصفوفة ونحسب:

$w_{14} = \infty + \infty = \infty$, $w_{65} = \infty + \infty = \infty$

نختار الضلع الموافق لأعظم قيمة، أي علينا أن نختار w_{65} أو w_{14} ، ولنأخذ $(6,5)$ مثلاً:
يصبح لدينا:

$$\{(\overline{5,2}), (\overline{3,1}), (\overline{2,3}), (\overline{4,6}), (\overline{6,5})\} \subseteq r'$$

$$\{(5,2), (3,1), (2,3), (4,6), (6,5)\} \subseteq r''$$



نقسم المصفوفة إلى مصفوفتين:

المصفوفة الأولى: نستبدل فيها $d_{65} = 0$ بـ ∞

المصفوفة الثانية: نحذف منها السطر السادس والعمود الخامس.

ملاحظة: الضلع $(1,4)$ يغلق دارة هاملتون لكنه لا يخل بالتعريف لذلك لم نستبدل قيمته بـ ∞.

$$D_4' = \begin{array}{c|cc|c} & 4 & 5 & \\ \hline 1 & 0 & \infty & u_1 = 0 \\ 6 & \infty & \boxed{\infty} & u_2 = \infty \\ \hline & v_1 = 0 & v_2 = \infty & \end{array} \qquad D_4'' = \begin{array}{c|c|c} & 4 & \\ \hline 1 & 0 & u_1 = 0 \\ \hline & v_1 = 0 & \end{array}$$

نحسب u_i , v_j ونعوض في المصفوفتين، ثم نحسب الكلفة:

$$C_4' = C_3'' + \sum u_i + \sum v_j$$
$$= 31 + \infty + \infty = \infty$$

$$C_4'' = C_3'' + \sum u_i + \sum v_j$$
$$= 31 + 0 + 0 = 31$$

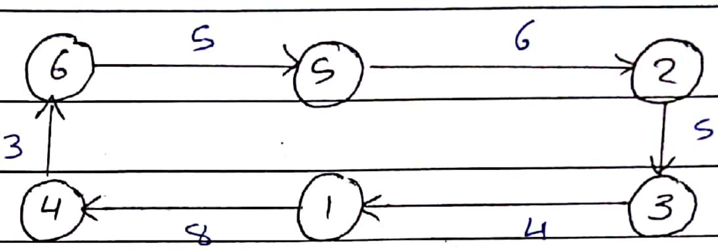
وبالتالي لم يبق إلا ضلع وحيد في المصفوفة D_4'' وهو $(1,4)$ نختاره، فيكون:

$\{\overline{(5,2)}, \overline{(3,1)}, \overline{(2,3)}, \overline{(4,6)}, \overline{(6,5)}, \overline{(1,4)}\} \subseteq r'$

$\{(5,2), (3,1), (2,3), (4,6), (6,5), (1,4)\} \subseteq r''$

إذاً تكون دارة هاملتون المطلوبة هي:

$\{(5,2), (2,3), (3,1), (1,4), (4,6), (6,5)\}$



من المصفوفة الأصلية نأخذ قيم الأضلاع ونضعها على الرسم السابق، ومن خلالها نحسب الكلفة الأصغرية كما يلي:

$C = 6 + 5 + 4 + 8 + 3 + 5 = 31$

انتهت المحاضرة