نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : الرابعة ◄ عنوان المحاضرة: التشاكلات المودولية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـتعريف للمودول :الصورة المباشرة-عكسية- $Ker(f)$- $Im(f)$

٢ـمبرهنات تخص التعريف

تعريف التشاكل المودولي : ليكن N, M مودولين على الحلقة $\mathbb{R}$ عندئذ نقول عن التطبيق $f \;:\; M \longrightarrow N$ أنه تشاكل مودولي إذا تحقق : $\forall\, x, y \in M \;\;,\;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

١) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

٢) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$:

تعريف التماثل : إذا كان $f \;:\; M \longrightarrow N$ تشاكلا مودوليا وكان f بإضافة لذلك تقابلا فإن f يدعى تماثلا مودوليا وعندئذ يكون $M \cong N$

تعريف الصورة المباشرة لمودول : إذا كان M, N مودولا على حلقة $\mathbb{R}$ وكان X مودولا جزئيا من M وكان $f: M \to N$ تشاكل مودولي فإن الصورة المباشرة ل X هي المجموعة

$$\vec{f}(X) = \{f(x) : \;\; x \in X\}$$

تعريف الصورة العكسية لمودول: إذا كان M, N مودولا على حلقة $\mathbb{R}$ وكان $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا وكان Y مودولا جزئيا من N فإن الصورة العكسية لY هي المجموعة :

$$\overleftarrow{f}(Y) = \{x \in M \;\;:\;\; f(x) \in Y\}$$

مبرهنة: ليكن M, N مودولا على حلقة $\mathbb{R}$ وكان $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا و كان X مودولا جزئيا من M عندئذ:

أثبت ان الصورة المباشرة $\vec{f}(X)$ مودولا جزئي من N

البرهان:

$0_M \in X$ (لأن X مودول جزئي من M)

وحسب تعريف الصورة الماشرة : $f(0_M) = 0_N$ لكن كون

$$f(0_M) \in \vec{f}(X) \Leftarrow 0_M \in X$$

وهذا يعني أن: $\vec{f}(X) \neq \emptyset$ وكذلك : $\vec{f}(X) \subseteq N$

ومن جهة ثانية: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall y_1, y_2 \in \vec{f}(X)$ عندئذ يوجد $x_1, x_2 \in X$

بحيث : $y_2 = f(x_2)$, $y_1 = f(x_1)$

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \Leftarrow$$

$$= f(\alpha x_1) + f(\beta x_2)$$

$$= f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in \vec{f}(X)$$

لان $\alpha x_1 + \beta x_2 \in X$ كون X مودولا جزئي من M

أي $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \vec{f}(X)$ ومنه فإن الصورة المباشرة $\vec{f}(X)$ مودول جزئي من N

سؤال: اذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلا مودوليا على الحلقة $\mathbb{R}$ ان :

$$\boxed{1)\, f(0_M) = 0_N}$$

الاثبات:

$$f(0_M) = f(0_M + 0_M) = f(0_M) + f(0_M) \Rightarrow f(0_M) - f(0_M) = f(0_M)$$
$$\Rightarrow f(0_M) = f(0_N)$$

$$\boxed{2)\, f(-x) = -f(x)}$$

الاثبات:

$$f(-x) = f(-1.x) \underbrace{=}_{\text{كون } f \text{ مودولي تشاكل}} -1.f(x) = -f(x)$$

مبرهنة : إذا كان M, N مودولا على حلقة R وكان $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا وكان Y مودولا جزئيا من N عندئذ يكون $\overleftarrow{f}(Y)$ مودول جزئي من M

الاثبات :

$f(0_M) = 0_N$ ونعلم ان (Y مودول جزئي من N) $0_N \in Y$

$$0_M \in \overleftarrow{f}(Y) \Leftarrow f(0_M) \in Y$$

حسب تعريف الصورة العكسية $\overleftarrow{f}(Y) \neq \emptyset \Leftarrow$ وكذلك $\emptyset \neq \overleftarrow{f}(Y) \subseteq M$

من جهة ثانية

$$\forall x_1, x_2 \in \overleftarrow{f}(Y) \quad , \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1) \in Y \quad , \quad f(x_2) \in Y \Leftarrow$$

$$\alpha . f(x_1) + \beta f(x_2) \Leftarrow$$

وكون Y مودول جزئي $\Leftarrow \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \in Y$

اي $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in Y$

إذا $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \overleftarrow{f}(Y)$

إذا $\overleftarrow{f}(Y)$ مودول جزئي من M

تعريف : إذا كان $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا على الحلقة $\mathbb{R}$ فإن نواة هذا التشاكل تعرف على انها

$$Ker(f) = \{x \in M: f(x) = 0_N\} = \overleftarrow{f}(0_N)$$

تشكل مودول جزئي من المنطلق

تعريف : إذا كان $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا على الحلقة $\mathbb{R}$ فإن صورة f التي يرمز لها ب $Im(f)$

هي: $Im(f) = \overrightarrow{f}(M)$

نتيجة:

١- f متباين $Ker(f) = 0_M \Leftrightarrow$

٢- f غامر $Im(f) = N \Leftrightarrow$

مبرهنة : إذا كان $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا فإن

١- $Im(f) = \overrightarrow{f}(M)$ مودولا جزئي من N

٢- $\overleftarrow{f}(0_N) = Ker\ (f)$ مودول جزئي من M

الاثبات :

١- بما ان $Im(f)$ هي صورة مباشرة ل M فإن $Im(f)$ مودول جزئي من N
٢- بما أن النواة هي صورة العكسية ل 0_N فإن $Ker(f)$ مودول جزئي من M

مبرهنة : إذا كان $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا على الحلقة R وكان A مودول جزئي من M و B مودول جزئي من N فإن :

١- $\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A + Ker(f)$

الاثبات :

$\forall x \in \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right)$ فإن $f(x) \in \vec{f}(A)$

وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث $f(x) = f(a)$

$$\Leftarrow f(x) - f(a) = 0_N$$

$$\Leftarrow f(x - a) = 0_N$$

$$\Leftarrow x - a \in Ker(f)$$

$$\Leftarrow x \in A + Ker(f)$$

$$\ldots\ldots(1) \quad \Leftarrow \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) \subseteq A + Ker(f)$$

من جهة ثانية : $\forall x \in A + Ker(f)$ حيث : $x = a + b \ , a \in A \ , b \in Ker(f)$

$$f(x) = f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$f(a) + 0 = f(a)$$

$$\Leftarrow f(x) \in \vec{f}(A)$$

$$\Leftarrow x \in \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right)$$

أي أن : $\ldots\ldots(2)$ $A + Ker(f) \subseteq \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right)$

من (١) و (٢) فان $\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A + Ker(f)$

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا هجع – رغد جوده – بكر مشرف