◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : السابعة ◄ عنوان المحاضرة: التمثيل الكروي للعدد العقدي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

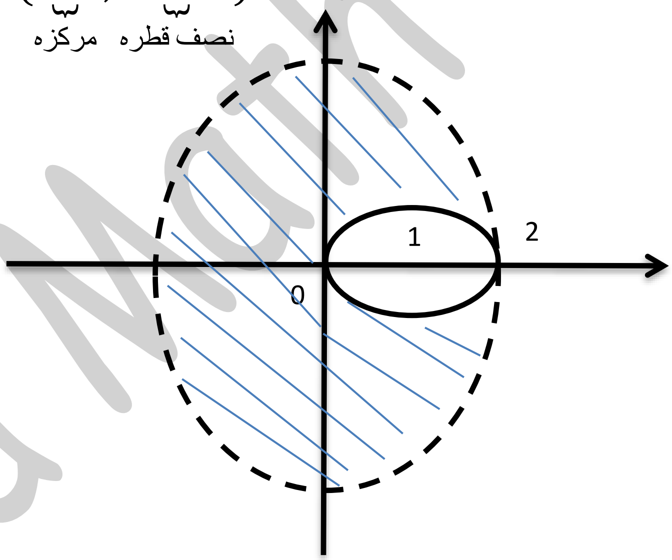
١-حل بعض الأمثلة عن تمثيل المجموعات النقطية في المستوي العقدي.

٢-التمثيل الكروي للأعداد العقدية.

٣- حل تمارين الوظيفة .

تمرين : عين المجموعة النقطية الممثلة للمجموعة : $D(0,2) \setminus D(\underbrace{1}_{\text{مركزه}}\ ,\ \underbrace{1}_{\text{نصف قطره}})$

رمز للقرص المفتوح الذي مركزه المبدأ ونصف قطره ٢



تمرين :عين المجموعة النقطية الممثلة للمعادلة / مثل المجموعة التالية : $|3-i|+|3-1|=2$

- هندسياً: $|3-i|$: تمثل بعد 3 عن i

$|3-1|$: تمثل بعد 3 عن 1

- ن مجموعة نقاط 3 التي تحقق المساواة السابقة هي مجموعة النقاط التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوي وهما ال i او ال 1 مساوياً لعدد ثابت هو ٢ أي تمثل قطع ناقص ، أي

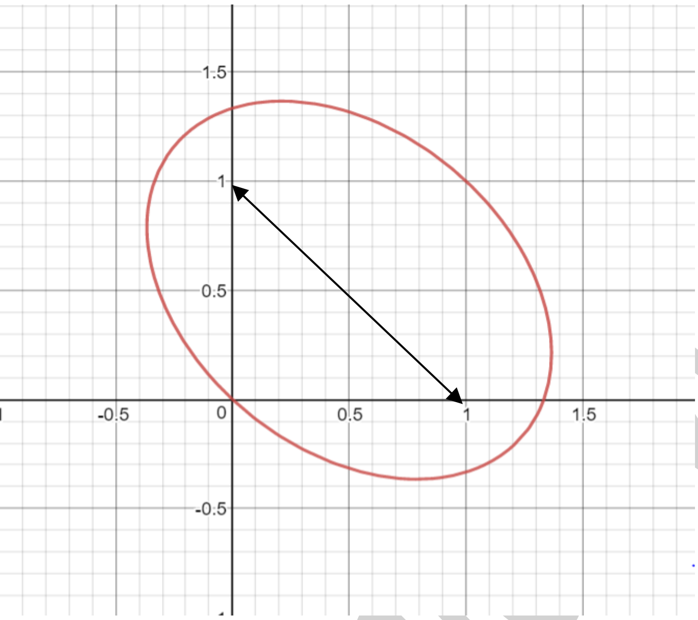
النقطتين الثابتتين هما المحرقان والعدد الثابت هو البعدين المحرقيين ،و مركزه هو منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها i أو ال ١ ، ونصف قطره الكبير هو $a = \frac{2}{2} = 1$

البعد المحرقي : $c = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 2c = \sqrt{2}$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

و المركز يقع في منتصف البعد بين الذروتين والبعد بين الذروتين يساوي ٢ .

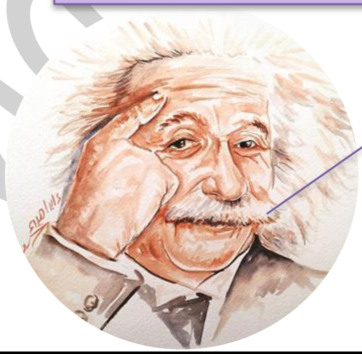
$\underbrace{r}_{\text{البعد}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ((الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص))



للدراسة إذا كانت :

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$

حيث a عدد حقيقي موجب هل سيتعين دائما قطع ناقص . $2a < a^2 - b^2$



التمثيل الكروي للأعداد العقدية :

لنزود الفراغ بجملة ثلاث محاور متعامدة : $\overrightarrow{ox_3} \ , \ \overrightarrow{ox_2} \ , \ \overrightarrow{ox_1}$

ولتكن : $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \ \ ; x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 1 \ \}$

حيث S^2تمثل كرة الواحدة في الفراغ أي الكرة التي مركزها هو مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها ١.

و لنمثل مجموعة الأعداد العقدية في المستوي

فيصبح هذا المستوي ox_1x_2 هو المستوي العقدي

نسمي النقطة $N(0,0,1)$ القطب الشمالي

نسمي النقطة $S(0,0,-1)$ القطب الجنوبي

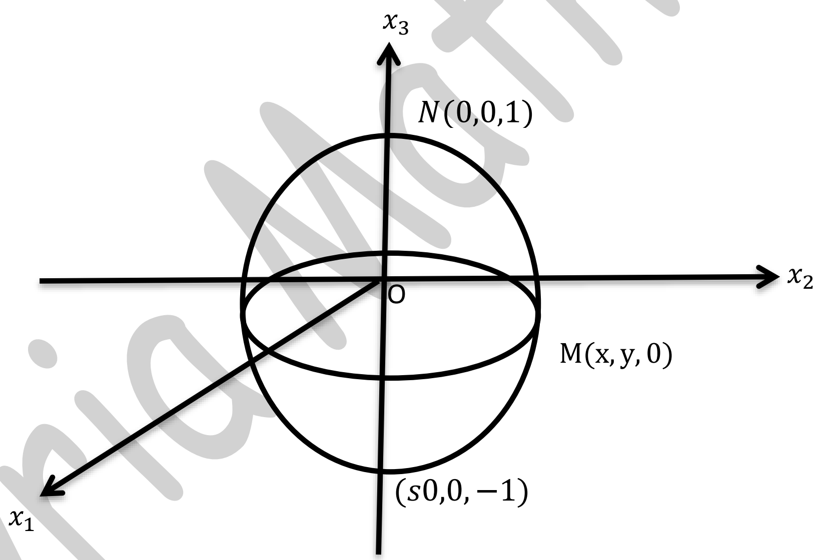
لتكن $\mathfrak{z} = x + iy$ عدداً عقدياً ، ولتكن $\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y},0)$ النقطة الممثلة لِ $\mathfrak{z}$ في المستوي العقدي ox_1x_2 ، ثم نصل النقطة M بالقطب الشمالي ، إن المستقيم المار من M و N سيقطع الكرة S^2 بنقطة نرمز لها $\mathrm{P}(x_1,x_2,x_3)$: ونسميها بالتمثيل الكروي للعدد العقدي أو بالنقطة الممثلة لِ $\mathfrak{z}$ على الكرة أو بمسقط العدد العقدي $\mathfrak{z}$.

*نسمي الكرة التي تمثل الأعداد العقدية بكرة ريمان .

النتيجة : لكل عدد عقدي نقطة ممثلة وحيدة على كرة ريمان والعكس صحيح .

نسمي التطبيق الذي يقرن كل عدد عقدي $\mathfrak{z}$ بمسقطه على الكرة بالإسقاط المجساوي.

*إن القطب الشمالي لن يكون ممثلا لأي نقطة من المستوي العقدي



- **حل بعض تمارين الوظيفة التي اعطيت في المحاضرة الماضية :**

١) اكتب الأعداد العقدية بالشكل المثلثي :

$$(1)\ \ \mathfrak{z}_1 = -1 - i$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = 5\frac{\pi}{4}$$

$$\mathfrak{z}_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\mathfrak{z}_1 = \sqrt{2}\left(\cos 5\frac{\pi}{4} + i\sin 5\frac{\pi}{4}\right)$$

$(2)\qquad \mathfrak{z} = \left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)^4$

$$\mathfrak{z}_1 = \sqrt{3} + 3i$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\mathfrak{z}_1 = \left[2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\mathfrak{z}_2 = 1 + i$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathfrak{z}_2 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 = \left(\frac{\left[2\sqrt{3}\,,\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}\,,\frac{\pi}{4}\right]}\right)^4$$

$$z = \left[\sqrt{6}\ ,\frac{\pi}{12}\right]^4 = \left[\left(\sqrt{6}\right)^4\ ,4\ \frac{\pi}{12}\right] = \left[36\ ,\frac{\pi}{3}\right]$$

ملاحظة: الشكل المثلثي يكتب $rcis\,\theta$ أو $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ أو $[r\ ,\theta]$

$(3)\quad z_3 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^5$

$$z_1 = -1+\sqrt{3}i$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = 2\frac{\pi}{3}$$

$$z_3 = \left[2\ ,2\frac{\pi}{3}\right]^5 = \left[32\ ,10\frac{\pi}{3}\right] = \left[32\ ,6\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right] = \left[32\ ,2\pi+\frac{4\pi}{3}\right]$$

وظيفة :مثل الأعداد العقدية في المستوي العقدي :

$(1)\ z_1 = \left[\sqrt{2}\ ,5\frac{\pi}{4}\right]\quad (2)\ z_1 = \left[2\ ,\frac{\pi}{3}\right]$

$(3)\ z_1 = \left[1\ ,4\frac{\pi}{3}\right]$

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى