المحاضرة 11

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ عنوان المحاضرة: الحقول المغلقة جبرياً

2018/11/1

نظري ☑ عملي ☐

الحقول المغلقة جبرياً واللصاقة الجبرية

مبرهنة: ليكن Ω حقل عندها الشروط التالية متكافئة:

(1) مهما تكن $p(x) \in \Omega(x)$ فإنها تنحل في Ω.

(2) مهما تكن $p(x) \in \Omega(x)$ فإن $p(x)$ تملك صفر في Ω.

(3) الحدوديات غير الخزولة على Ω من الدرجة 1 فقط.

(4) كل تمديد منتهي لـ Ω يساويه

(5) كل تمديد جبري لـ Ω يساويه

ندعو الحقل Ω الذي يحقق أحد هذه الشروط بحقل مغلق جبرياً.

مثال: حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ هو حقل مغلق جبرياً.

تعريف اللصاقة الجبرية لـ حقل K:

نعرف اللصاقة الجبرية لـ K بأنها الحقل $\bar{K}$ الذي يحقق الشروط التالية:

(1) $\bar{K}$ مغلق جبرياً، (2) $\bar{K}/K$ تمديد جبري

مثال: $\mathbb{C}$ ليست لصاقة لـ $\mathbb{Q}$ لأن $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ ليس جبري

حيث لدينا $e, \pi \in \mathbb{C}$ عناصر ليست جبرية

سؤال: ما هي اللصاقة الجبرية لـ $\mathbb{Q}$ ؟؟

إن $\bar{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha$ جبري على $\mathbb{Q}\}$ لصاقة $\mathbb{Q}$ **لأن:**

• $\bar{\mathbb{Q}}$ حقل لأن $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{Q}}$ ومنه $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ تمديد منتهي

$\mathbb{Q}(\alpha,\beta)/\mathbb{Q}(\alpha)$ تمديد منتهي $\Leftarrow$ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)/\mathbb{Q}$ منتهي $\Leftarrow$

$\mathbb{Q}(\alpha,\beta)/\mathbb{Q}$ جبري.

$\bar{\mathbb{Q}}$ حقل $\Rightarrow$ $\alpha - \beta \in \bar{\mathbb{Q}}$, $\alpha \cdot \beta^{-1} \in \bar{\mathbb{Q}}$ $\Rightarrow$

• $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ جبري و $\bar{\mathbb{Q}}$ مغلقة جبرياً

حقل التفريق Splitting field :

ليكن $p(x) \in K[x]$ غير خزولة على K عندها نقول عن F أنه حقل تفريق الحدودية $p(x)$ على K إذا تحقق ما يلي :

(1) F يحوي أصفار الحدودية

(2) أصغر الحقول التي تحقق (1).

مثال : • $x^2-2 \in Q[x]$ حقل تفريق هذه الحدودية هو $Q(\sqrt{2})$

• $x^2+1 \in Q[x]$ حقل تفريق هذه الحدودية هو $Q(i)$

• $x^3-2 \in Q[x]$ حقل تفريق هذه الحدودية هو $Q(\sqrt[3]{2}, j)$

لأن أصفار هذه الحدودية هي : $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\,j, \sqrt[3]{2}\,j^2$

• $x^n-2 \in Q[x]$ حيث $n \geq 2$ فإن حقل تفريق هذه الحدودية هو $Q(\sqrt[n]{2}, \xi_n)$ لأن أصفار هذه الحدودية هي

$\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}\,e^{i\frac{2\pi}{n}}, \sqrt[n]{2}\,(e^{i\frac{2\pi}{n}})^2, \ldots, \sqrt[n]{2}\,(e^{i\frac{2\pi}{n}})^{n-1}$

وبالتالي $\xi_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ جذر أولي للواحد من المرتبة n.

عندها جذور هذه المعادلة هي :

$\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}\,\xi_n, \sqrt[n]{2}\,\xi_n^2, \ldots, \sqrt[n]{2}\,(\xi_n)^{n-1}$

• $x^3-3 \in Q[x]$ أصفار هذه الحدودية هي

$\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}, \sqrt[3]{3}\,(e^{i\frac{2\pi}{3}})^2$

$\Rightarrow \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\,j, \sqrt[3]{3}\,j^2$

$\Rightarrow Q(\sqrt[3]{3}, j)$ هو حقل تفريق المطلوب

• لتكن $\alpha = \sqrt{\sqrt{3}+1}$ عنصر جبري على Q عندئذ

1- أوجد $p(x) = irr(\alpha, Q)$

2- أوجد حقل تفريق $p(x)$ على Q

الحل : $\boxed{1}$ $x = \alpha = \sqrt{\sqrt{3}+1}$

إن $x - \sqrt{\sqrt{3}+1} \in Q[x]$

$\Rightarrow x^2 = \sqrt{3}+1 \Rightarrow x^2-1 = \sqrt{3}$

$\Rightarrow (X^2-1)^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow X^4 - 2X^2 + 1 = 3$

$\Rightarrow X^4 - 2X^2 - 2 = p(X)$

وهي فزولة على $\mathbb{Q}[X]$ لأنها ذات الدرجة الأصغر

$p(X) = (X^2-1)^2 - 3 = (X^2-1-\sqrt{3})(X^2-1+\sqrt{3})$ $\boxed{2}$

$= (X^2-(1+\sqrt{3}))(X^2-(1-\sqrt{3}))$

$= (X^2-(\sqrt{1+\sqrt{3}})^2)(X^2-(\sqrt{1-\sqrt{3}})^2)$

$= (X-\sqrt{1+\sqrt{3}})(X+\sqrt{1+\sqrt{3}}).(X-\sqrt{1-\sqrt{3}})(X+\sqrt{1-\sqrt{3}})$

إذاً أصفار $p(X)$ هي

$\underbrace{+\sqrt{1+\sqrt{3}}}_{\alpha},\ \underbrace{-\sqrt{1+\sqrt{3}}}_{-\alpha},\ \underbrace{+\sqrt{1-\sqrt{3}}}_{\beta},\ \underbrace{-\sqrt{1-\sqrt{3}}}_{-\beta}$

لنحسب $\alpha.\beta = \sqrt{1+\sqrt{3}}\ \sqrt{1-\sqrt{3}} = \sqrt{1-3} = i\sqrt{2}$

$\Rightarrow \beta = \dfrac{i\sqrt{2}}{\alpha} = i\sqrt{2}.\alpha^{-1}$

$\Leftarrow$ حقل التفريق هو $F = \mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$

ملاحظة: يمكن كتابة حقل التفريق هو $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, -\alpha, -\beta)$

وهذا صحيح ولكن عادةً ما يأتي السؤال في امتحان يتكون من عدة طلبات

ويأتي بعده طلب أحسب درجة التمديد وسوف يكون لدينا خطأ في

حسابها لذلك يُفضل كتابة حقل التفريق كما في حل المثال ١

ملاحظة: إن $2 \in \mathbb{Q}$ ولكن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

- $\theta \in F$ (حقل) $\not\Rightarrow \sqrt{\theta} \in F$

- $\theta \in F$ (حقل) $\Rightarrow \theta^n \in F$ و $\theta^{-n} \in F$ حيث $n \in \mathbb{N}$

مثال: لتكن $\alpha = -\sqrt[3]{2}$ عنصر جبري على $\mathbb{Q}$ عندئذٍ

1- أوجد $p(X) = irr(\alpha, \mathbb{Q})$

2- أوجد حقل تفريق $p(X)$ على $\mathbb{Q}$ عن طريق $-\sqrt[3]{2}$

الحل: 1- $X = \alpha = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow X^3 = -2$

$\Rightarrow X^3 + 2 = p(X) = irr(\alpha, \mathbb{Q})$

$x^3 = -2 \Rightarrow r^3 \operatorname{cis} 3\theta = -2$ ـ2

وذلك بفرض $x = r \operatorname{cis}\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^3 = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{r^3} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2\pi K \quad : K = 0, 1, 2 \end{cases}$$

"زاوية العدد السالب هي π"

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi K \ , \ K = 0, 1, 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_K = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi K\right) \ ; K = 0, 1, 2$$

$$\Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\pi - 2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\pi - 2\frac{\pi}{3} + 6\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-2\frac{\pi}{3} + 6\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(4\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt[3]{2}\, j^2$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}(\pi) = -\sqrt[3]{2}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\sqrt[3]{2}\, j$$

ومنه حقل التفريق هو $\Rightarrow \mathbb{Q}(-\sqrt[3]{2}, j)$

وظيفة: لتكن $\alpha = \sqrt{\sqrt{5} + 1}$ عنصر جبري على $\mathbb{Q}$ عندئذٍ

1- أوجد $p(x) = irr(\alpha, \mathbb{Q})$

2- أوجد حقل تفريق $p(x)$ على $\mathbb{Q}$.

انتهت المحاضرة

إعداد: م. الحليك البوشي...