20/10/2018

نظري

◄ دكتور المادة: جمال الملي

◄ المحاضرة: التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: براهين التمام

سندرس في محاضرتنا براهين التمام لبعض الفضاءات المترية وسنلاحظ أننا نعتمد في براهيننا على تمام الفضاء R أو $\mathbb{C}$ بالنسبة للمترك المعرف عليها وهو المألوف كما أننا نلاحظ أن في هذه البراهين نتبع نفس الخطوات حيث أننا نختار كوشية من هذا الفضاء ونثبت تقاربها في الفضاء نفسه عندئذ يكون الفضاء تاما بالنسبة للمترك المعرف عليها .....

مبرهنة تمام الفضاء R^n:

الاثبات :

لإثبات أن الفضاء R^n فضاء تام يجب إثبات أن كل متتالية كوشية في هذا الفضاء هي متتالية متقاربة

لنعرف على الفضاء R^n المترك المألوف المعرف كما يلي :

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث أن $x=(\xi_1,\xi_2,\dots.,\xi_n)$ $\quad$ $y=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$

ولنأخذ المتتالية $\{x_m\}$في الفضاءR^n بحيث تكون هذه المتتالية كوشية وليكن من عناصر هذه المتتالية:

$$x_m=(\xi_1^m,\xi_2^m,\dots\dots\dots.,\xi_n^m);\quad \xi_i^m\in R \quad ;i=1,2,3,\dots\dots\dots.n$$

$$x_r=(\xi_1^r,\xi_2^r,\dots\dots\dots.,\xi_n^r);\quad \xi_i^r\in R \quad ;i=1,2,3,\dots\dots\dots.n$$

و ذلك من أجل $m,r\geq N$

إذ أنه لما كان $\{x_m\}$ كوشية فرضاً فإن :

$$\forall\varepsilon>0;\exists N>0;m,r\geq N:d(x_m,x_r)<\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0; m,r \geq N: \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i^m - \xi_i^r\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i^m - \xi_i^r\right)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \left(\xi_i^m - \xi_i^r\right)^2 < \varepsilon^2$$

لأن مجموع مقادير موجبة تماما أصغر من ε^2 بالتالي كل حد من هذه المجاميع أصغر من ε^2

$$\overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} \left|\left(\xi_i^m - \xi_i^r\right)\right| < \varepsilon$$

أي أنها تحقق :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0; m,r \geq N: \left|\left(\xi_i^m - \xi_i^r\right)\right| < \varepsilon \qquad i = 1,2,3, \ldots.$$

أي أنه أصبح لدينا n متتالية كوشية حقيقية في R

وبما أن الفضاء R تام فإن كل متتالية كوشية فيه متقاربة وبالتالي فإن المتتالية الحقيقية

$$\left(\xi_i^m\right)_{m\geq 1} \quad ; i = 1,2,3, \ldots n$$

هي متتالية متقاربة في R وبفرض أنها متقاربة من ξ_i أي أنه :

$$\xi_i^m \rightarrow \xi_i \in R \; ; i = 1,2,3 \ldots.$$

والتوضيح كالتالي :

$$x_1 = \xi_{i_1}^1, \xi_{i_2}^1, \ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_{i_n}^1$$

$$x_2 = \zeta_1^2, \xi_{i_2}^2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_{i_n}^2$$

$$x_m = \xi_{i_1}^m, \xi_{i_2}^m, \ldots\ldots\ldots\ldots, \xi_{i_n}^m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

العمود الأول هو عبارة عن متتالية حقيقية كوشية ومتقاربة وكذلك جميع الأعمدة حتى العمود n ونلاحظ أنه عندما $m \rightarrow \infty$ فإن العمود الأول يتقارب إلى ξ_1 والعمود الثاني إلى ξ_2 وهكذا حتى العمود n يتقارب إلى ξ_n وبالتالي تشكل لدينا العنصر :

Syria Math Team

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) \in R$$

وتبقى ليتم المطلوب إثبات أن $x_m \to x \ ; m \to \infty$

أي نريد إثبات أن :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0; m \geq N: d(x_m, x_r) < \varepsilon$$

وبالاعتماد على

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0; m, r \geq N: d(x_m, x_r) < \varepsilon$$

حيث $r \to \infty$ نجد أن :

$$\lim_{r\to\infty} d(x_m, x_r) = \lim_{r\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^m - \xi_i^r)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^m - \xi_i^r)^2\right)^{\frac{1}{2}}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lim_{r\to\infty} (\xi_i^m - \xi_i^r)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i^m - \lim_{r\to\infty} \xi_i^r\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

وبما أن ξ_i^r متقاربة من ξ_i عندما $r \to \infty$ نجد أن :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lim_{r\to\infty} (\xi_i^m - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(x_m, x) < \varepsilon$$

وبالتالي فإن $x_m \to x$ متقاربة .

أي أنه كل متتالية كوشية في الفضاء R^n متقاربة .

$\Longleftarrow$ الفضاء R^n هو فضاء تام على المترك المعرف عليه .

لنبرهن تمام الفضاء ℓ^∞ :

تذكرة : ((الفضاء ℓ^∞ هو فضاء جميع المتتاليات المحدودة من الأعداد العقدية أو الحقيقية))

لتكن المتتالية $x_m \in \ell^\infty$ حيث $x_m = (\xi_1^m, \xi_2^m, \dots\dots\dots, \xi_n^m, \dots)$ حيث أن x_m هي كوشية في ℓ^∞:

Syria Math Team

ولنعرف على هذا الفضاء المترك المعرف بالشكل :

$$d(x_m, x_r) = \sup\left|\xi_i^m, \xi_i^r\right| < \varepsilon \quad ; m, r > N$$

ولنثبت أن x_m تتقارب في هذا الفضاء بما أنها كوشية فهي تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0; m, r \geq N: d(x_m, x_r) < \varepsilon \implies \sup\left|\xi_i^m, \xi_i^r\right| < \varepsilon$$

((وذلك لأنه الـ sup مقادير غير سالبة أصغر من ε فإن كل من هذه المقادير سيكون أصغر من ε))

وبالتالي تحقق لدينا :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0; m, r \geq N: \left|\xi_i^m, \xi_i^r\right| < \varepsilon$$

وذلك من أجل كل i فإن ξ_i^m هي عبارة عن متتالية كوشية عقدية أو حقيقية وبما أن الفضاء R أو $\mathbb{C}$ تاماً فإن كل من هذه المتتاليات متقاربة أي $\left|\xi_i^m - \xi_i^r\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \xi_i^m \longrightarrow \xi_i$

ولنوضح ذلك نأخذ مجموعة من المتتاليات من الفضاء $\boldsymbol{\ell}^\infty$ حيث :

$$x_1 = \xi_1^1, \xi_2^1, \dots\dots\dots\dots, \xi_n^1, \dots$$

$$x_2 = \xi_1^2, \xi_2^2, \dots\dots\dots\dots, \xi_n^2, \dots.$$

$$x_m = \xi_1^m, \xi_2^m, \dots\dots\dots\dots, \xi_n^m, \dots.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

نلاحظ أن من أجل كل i لدينا عمود عبارة عن متتالية كوشية متقاربة أي من أجل $i = 1$ لدينا ξ_1^m متقاربة من ξ_1 وهكذا ..

وكذلك من أجل كل $i \geq 1$ و بالتالي تتشكل لدينا المتتالية :

$$x = (\xi_i) = \left(\xi_1, \xi_2, \dots\dots \xi_{n,\dots}\right)$$

ولنثبت أن $x \epsilon \boldsymbol{\ell}^\infty$

إن x هي متتالية من الأعداد الحقيقية أو العقدية ولنأخذ :

Syria Math Team

$$|\xi_i| = |-\xi_i| = |\xi_i^m - \xi_i - \xi_i^m| \leq |\xi_i^m - \xi_i| + |\xi_i^m|$$

بالاعتماد على $\varepsilon > |\xi_i^m - \xi_i^r|$ نجد أن : $\xi_i^m \longrightarrow \xi_i \Leftrightarrow |\xi_i^m - \xi_i^r| < \varepsilon$

وأن $|\xi_i^m|$ أصغر من c_{x_m} ((وذلك حسب تعريف ℓ^∞ حيث $c_{x_m} \epsilon R$))

وباختيار $\varepsilon = 1$ يكون لدينا :

$$|\xi_i| \leq 1 + c_{x_m} = c_x \in R$$

وهذا يعني $x \epsilon \ell^\infty$

وتبقى لكي يتم المطلوب إثبات أن (x_m) متقاربة من x

لدينا $d(x_m, x_n) = \sup|\xi_i^m, \xi_i^r|$

وبجعل فإن هذا المقدار يسعى إلى الصفر أي أن

$$sup\left(\xi_i^m - \lim_{r\to\infty} \xi_i^r\right) = \sup|\xi_i^m - \xi_i| < \varepsilon$$

حيث ε هو الفضاء $d(x_m, x_n)$

أي أنه تحقق لدينا :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0; m \geq N \Longrightarrow \sup|\xi_i^m, \xi_i| < \varepsilon$$

وبالتالي فإن المتتالية x_m متقاربة من x

أي أنه كل متتالية كوشية في الفضاء ℓ^∞ هي متتالية متقاربة فيه وبالتالي فإن الفضاء ℓ^∞ هو فضاء تام على المترك المعرف عليه .

انتهت المحاضرة

افعل الشيء الصحيح فإن ذلك سوف يجعل البعض ممتنا بينما يندهش الأخرون

إعداد: بسمة نصر الله – تقى إسماعيل – نذير تيناوي

Syria Math Team

Syria Math Team