المحاضرة الحادية عشر

دكتور المادة: شوقي الراشد

عنوان المحاضرة: مراجعات بنى 2

نظري ☑
عملي ☐

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية واحدية و $r, r' \in R$ نقول أن r تقسم r'
إذا كان $\exists s \in R : r' = r.s$ ونرمز لذلك $r \mid r'$

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية واحدية نقول أن $r \in R$ عنصر غير قابل للتحليل في R
إذا تحقق $0 \neq r \in R \setminus U(R)$ بحيث $s, t \in R : r = s.t$
$\Rightarrow s \in U(R) \vee t \in U(R)$

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية واحدية نقول عن $r, r' \in R$ أنهما مترادفان
(أمثالاً بكلام رمزي وفقاً) إذا $\langle r \rangle = \langle r' \rangle \Leftrightarrow r' = u.r : \exists u \in U(R)$

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية واحدية نقول عن $r \in R$ أنه عنصر أولي في R إذا
تحقق $0 \neq r \in R \setminus U(R)$ بحيث $s, t \in R : r \mid s.t$
$\Rightarrow r \mid s \vee r \mid t$

أمثلة: لتكن $R = (Z, +, \cdot)$ العدد 2 أولي في Z هو غير قابل للتحليل في Z
وأيضاً 4، 4- مترادفان

- لتكن $R = (Z_6, +, \cdot)$ إن $U(R) = \{1, 5\}$ وأن $0 \neq 2 \notin U(R)$
ومنه 2 عنصر أولي وقابل للتحليل في R وأيضاً 2، 4 مترادفان

ملاحظة: كل عدد يترادف مع نفسه

تمرين: لتكن R حلقة تبديلية واحدية و $0 \neq r \in R$

1) بين فيما إذا كان r عنصر أولي في R فإن r عنصر غير قابل للتحليل في R،

2) إذا كانت R هي ID و r أولي في R فإن r غير قابل للتحليل في R،

ثم بين أن العكس ليس صحيح بالضرورة.

الحل: 1) مثال معاكس تم إعطاؤه قبل البدء بالتمرين $R=(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$

2) لنفرض أن r أولي ومنه $0 \neq r \notin U(R)$ بحيث

$s,t \in R : r = s.t \Rightarrow r \mid s.t \Rightarrow r \mid s \vee r \mid t$

$\exists u \in R : s = u.r \Rightarrow r = u.r.t \Rightarrow u.t = 1$

$\Rightarrow t \in U(R)$

ومنه r غير قابل للتحليل في R (وذلك بفرض $r \mid s$).

العكس ليس صحيح بالضرورة (وظيفة).

تعريف: لتكن R حلقة واحدية تبديلية (ID): نقول أن R حلقة (منطقة) اقليدية إذا وجد $\exists \varphi : R\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$

$\forall x,y \in R\setminus\{0\} : \exists r,q \in R : y = x.q + r$

إما $r = 0$ أو $\varphi(r) < \varphi(x)$

مثال: $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة اقليدية لأن $\varphi : R\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ مع

$\forall x \in R\setminus\{0\} : \varphi(x) = |x| \Rightarrow \forall x,y \in R\setminus\{0\} : \exists q,r \in R$

$y = x.q + r : r = 0 \vee \varphi(r) = |r| < |x| = \varphi(x)$

إذا كانت R حقل فإن R[X] هي منطقة اقليدية

بما أن R حقل ⇐ R هي ID ومنه R[X] هي ID كما أنه يوجد

$\omega: R[x]\setminus\{0\} \to \mathbb{N}: \forall f\in R[x]\setminus\{0\}: \omega(f)=\deg f$

$\forall f,g \in R[x]\setminus\{0\}: \exists q,r\in R[x]: g = f\cdot q + r$

$\omega(r)=\deg(r) < \deg(f)=\omega(f) \lor r=0$

تعريف: لتكن R حلقة واحدية تبديلية (ID) نقول أنها حلقة مثاليات رئيسية (منطقة مثاليات رئيسية) إذا كان كل مثالي في R مثالي رئيسي أي مولد بعنصر وحيد من R إذا R هي PID ⟸ $I \trianglelefteq R: \exists r\in R: I=\langle r\rangle$

مبرهنة: إذا كانت R حلقة (منطقة) إقليدية فإن R هي (PID) PIR،

الإثبات: ليكن $I \trianglelefteq R$ إذا كان $I=\langle 0\rangle$ فهو مثالي رئيسي

$I\neq\langle 0\rangle$ ومنه يوجد $0\neq a\in I$ بحيث $\omega(a)$ أصغري بالنسبة للدالة ω حيث

$\omega: R\setminus\{0\}\to\mathbb{N}: \forall x,y\in R\setminus\{0\}: y = xq+r:$

$\omega(r)<\omega(x)$ أو $r=0$

لدينا $a\in I$ ومنه $\langle a\rangle\subseteq I$ ولنبرهن الاحتواء المعاكس

$\forall b\in I: b = aq+r: q,r\in R:$ $\omega(r)<\omega(a)$ أو $r=0$

إذا كان $r=0 \Rightarrow b = a\cdot q\in\langle a\rangle$ ومنه يتم المطلوب

$r\neq 0 \Rightarrow r = \underbrace{b}_{\in I} - \underbrace{aq}_{\in I}\in I$ وهذا مرفوض لكون $\omega(a)$ أصغري

ومنه هذه الحالة مرفوضة ومنه $r=0$ ⟸ $I\subseteq\langle a\rangle$ ⟸ $I=\langle a\rangle$

ومنه كل مثالي مولد بعنصر أي أن I مثالي رئيسي و R حلقة مثاليات رئيسية.

تعريف: r عنصر أولي في R ⟸ $\langle r\rangle\in Spec(R)$

نتيجة: لتكن R هي PID و $0\neq r\in R$ فإن:

1) r غير قابل للتحليل ⟸ $\langle r\rangle \trianglelefteq. R$

2) r ـــ ⟸ r عنصر أولي في R.

3) $Spec(R) = M\text{-}Spec(R) \cup \{\langle 0\rangle\}$.

الاثبات: 1) $\Leftarrow$ ليكن $I \trianglelefteq R$ حيث $I \subseteq \langle r \rangle \subseteq R$ وكون R هي PID فإنه

$$\exists a \in R : I = \langle a \rangle \Rightarrow r \in \langle r \rangle \subseteq \langle a \rangle \subseteq R$$

$$\Rightarrow \exists x \in R : r = a \cdot x \Rightarrow a \in U(R) \vee x \in U(R)$$

ومنه العنصران r, a مترادفان أي $\langle r \rangle = \langle a \rangle$ أو $\langle a \rangle = R$

وفي كلتا الحالتين $\langle r \rangle \trianglelefteq_{\cdot} R$

$\Rightarrow$) بما أن $\langle r \rangle$ أعظمي حسب التمرين السابق r أولي في R

ومنه r غير قابل للتحليل في R لكون R هي PID وبالتالي حتى في ID.

2) r غير قابل للتحليل وحسب 1 فإن $\langle r \rangle$ أعظمي وحسب التمرين السابق r أولي في R وهو المطلوب

3) بما أن كل مثالي أعظمي هو أولي وكون R هي ID ومنه المثالي الصفري أيضاً أولي ومنه $M\text{-}Spec(R) \cup \{\langle 0 \rangle\} \subseteq Spec(R)$

ولنثبت الاحتواء المعاكس

$\forall P \in Spec(R) : P = \langle a \rangle$ يتم المطلوب

$P \neq \{\langle 0 \rangle\} \Rightarrow \exists r \neq 0 : r \in P : P = \langle r \rangle$

ومنه r أولي في R ومنه r غير قابل للتحليل في R ومنه $\langle r \rangle \trianglelefteq_{\cdot} R$ وبالتالي

$$Spec(R) \subseteq M\text{-}Spec(R) \cup \{\langle 0 \rangle\}$$

ومنه المساواة صحيحة وتم المطلوب

انتهت المحاضرة

إعداد وتقديم

Ahmad Abo Altot