◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: تتمة في التدحرج دون انزلاق

سنكمل أصدقائي في هذه المحاضرة دراسة فقرة التدحرج دون انزلاق مع سؤال دورة و مسألة

إيجاد $\vec{\omega}$ في الجملة المتماسكة

لدينا علاقة شعاع الدوران للتدحرج بدون انزلاق

$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$$

ونعلم ان كل من $(\vec{u},\overrightarrow{k_1})$ متجهات يجب استبدالهم ((اما بالإسقاط أو بمصفوفات التحويل)) بمتجهات الجملة المتماسكة $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ليصبح الشعاع $\vec{\omega}$ في الجملة المتماسكة

لنوجد أولاً $\overrightarrow{k_1}$ ...

$$\overrightarrow{k_1} = \sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k}$$

نلاحظ انه ظهر لدينا المتجه $\vec{v}$ لذلك يجب علينا ايجاده ايضاً لتصبح العلاقة محمولة على كل من متجهات الجملة المتماسكة $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ فقط .

$$\vec{v} = \sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

نعوض علاقة $\vec{v}$ بعلاقة $\overrightarrow{k_1}$ فتصبح ...

$$\overrightarrow{k_1} = \sin\theta(\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}) + \cos\theta\,\vec{k}$$

لنوجد الآن $\vec{u}$ عن طريق مصفوفات التحويل كما في المحاضرة السابقة .

$$\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

بتعويض كل من $\overrightarrow{k_1},\vec{u}$ في علاقة شعاع الدوران $\vec{\omega}$ نجد :

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = (\psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi)\vec{\imath} + (\psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi)\vec{\jmath}$$
$$+(\psi'\cos\theta + \varphi')\vec{k}$$

حيث

$$\vec{\omega} = \underbrace{(\psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi)}_{p}\vec{\imath} + \underbrace{(\psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi)}_{q}\vec{\jmath}$$
$$+ \underbrace{(\psi'\cos\theta + \varphi')}_{r}\vec{k}$$

ومنه مركبات شعاع الدوران على الجملة المتماسكة هي : $\vec{\omega}(p,q,r)$

$$p = (\psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi)$$
$$q = (\psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi)$$
$$r = (\psi'\cos\theta + \varphi')$$

ولإيجاد السرعة نطبق القانون التالي :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(M) = (qz - ry)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (py - xq)\vec{k}$$

ولإيجاد التسارع نطبق القانون

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p' & q' & r' \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ \vec{v}_x(M) & \vec{v}_y(M) & \vec{v}_z(M) \end{vmatrix}$$

إيجاد $\overrightarrow{\omega}$ في الجملة الثابتة

عن طريق مصفوفات التحويل نقوم بتحويل u, k إلى الجملة الثابتة

لدينا : $\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k} \dots \dots (*)$

نكتب عبارة $\vec{u}$ من المصفوفة الأولى : $\vec{u} = \cos\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + \sin\psi\,\overrightarrow{\jmath_1}$

ونكتب عبارة $\vec{k}$ من المصفوفة الثانية : $\vec{k} = -\sin\theta\,\overrightarrow{v_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{k_1}$

ونحول الشعاع $\overrightarrow{v_1}$ عن طريق المصفوفة الأولى فنجد : $\overrightarrow{v_1} = -\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + \cos\psi\,\overrightarrow{\jmath_1}$

بالتعويض في عبارة $\vec{k}$ نجد :

$$\vec{k} = -\sin\theta\,(-\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + \cos\psi\,\overrightarrow{\jmath_1}) + \cos\theta\,\overrightarrow{k_1}$$

$$\Longrightarrow \vec{k} = \sin\theta\,.\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} - \sin\theta\,.\cos\psi\,\overrightarrow{\jmath_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{k_1}$$

الآن نعوض قيمة كل من $\vec{u}, \vec{k}$ بعبارة شعاع الدوران نجد :

$$\vec{\omega} = (\theta'\cos\psi + \varphi'\sin\theta\,.\sin\psi)\overrightarrow{\imath_1} + (\theta'\sin\psi - \varphi'\sin\theta\,.\cos\psi)\overrightarrow{\jmath_1}$$
$$+(\psi' + \varphi'\cos\theta)\overrightarrow{k_1}$$

وهي **عبارة شعاع الدوران على الجملة الثابتة** .

ومنه **مركبات شعاع الدوران** هي :

$$\boxed{\begin{aligned} p_1 &= \theta'\cos\psi + \varphi'\sin\theta\,.\sin\psi \\ q_1 &= \theta'\sin\psi - \varphi'\sin\theta\,.\cos\psi \\ r_1 &= \psi' + \varphi'\cos\theta \end{aligned}}$$

ومنه نجد أن مركبات شعاع الدوران على الثابتة $\vec{\omega}(p_1, q_1, r_1)$.

ولإيجاد السرعة في الجملة الثابتة نطبق القانون التالي :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{o_1M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(M)=(q_1z_1-r_1y_1)\vec{\imath_1}+(r_1x_1-z_1p_1)\vec{\jmath_1}+(p_1y_1-x_1q_1)\vec{k_1}$$

ولإيجاد التسارع نطبق القانون التالي :

$$\vec{\Gamma}(M)=\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{o_1M}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1}\\ p'_1 & q'_1 & r'_1\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1}\\ p_1 & q_1 & r_1\\ \vec{v}_{x_1}(M) & \vec{v}_{y_1}(M) & \vec{v}_{z_1}(M)\end{vmatrix}$$

سؤال دورة قديم جداً ((منذ عقدٍ أو يزيد))

هل $\vec{\varepsilon}(p',q',r')$ هي مشتق $\vec{\omega}$ على الجملة المتماسكة ؟؟

إن شعاع الدوران على الجملة المتماسكة يعطى بالعلاقة :

$$\vec{\omega}=\psi'\vec{k}+\theta'\vec{u}+\varphi'\vec{k}$$

وبعد الإصلاح والتعويض وجدنا من الفقرة السابقة تعطي بالعلاقة :

$$\vec{\omega}=p\vec{\imath}+q\vec{\jmath}+r\vec{k}$$

ونعلم أن التسارع الزاوي $\vec{\varepsilon}$ هو مشتق السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ فتصبح :

$$\vec{\varepsilon}=p'\vec{\imath}+p\vec{\imath'}+q'\vec{\jmath}+q\vec{\jmath'}+r'\vec{k}+r\vec{k'}$$

حيث $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ اشعة الواحدة للجملة المتحركة وهي متغيرة ، ونعلم أن تغير أشعة الواحدة حسب بواسون يعطوا في العلاقات التالية :

$$\overrightarrow{\imath'}=(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath})\quad,\quad\overrightarrow{\jmath'}=(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath})\ ,\quad\overrightarrow{k'}=(\vec{\omega}\wedge\vec{k})$$

$$\Longrightarrow \vec{\varepsilon}=p'\vec{\imath}+p(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath})+q'\vec{\jmath}+q(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath})+r'\vec{k}+r(\vec{\omega}\wedge\vec{k})$$

$$\Longrightarrow \vec{\varepsilon}=p'\vec{\imath}+p\vec{\omega}\wedge p\vec{\imath}+q'\vec{\jmath}+q\vec{\omega}\wedge q\vec{\jmath}+r'\vec{k}+r\vec{\omega}\wedge r\vec{k}$$

وبإخراج $\wedge\ \vec{\omega}$ عامل مشترك نجد :

$$\Longrightarrow \vec{\varepsilon}=p'\vec{\imath}+q'\vec{\jmath}+r'\vec{k}+\vec{\omega}\wedge\left(\underbrace{p\vec{\imath}+q\vec{\jmath}+r\vec{k}}_{\vec{\omega}}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{\varepsilon}=p'\vec{\imath}+q'\vec{\jmath}+r'\vec{k}+\underbrace{\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}}_{0}$$

$$\Longrightarrow \vec{\varepsilon}=p'\vec{\imath}+q'\vec{\jmath}+r'\vec{k}$$

ومنه نجد ان $\vec{\varepsilon}$ هو مشتق شعاع الدوران $\vec{\omega}$ في الجملة المتماسكة .

المحل الهندسي للمحور الآني للدوران تحليلياً

في الجملة الثابتة

$$\forall\quad M\in s:\overrightarrow{o_1M}//\vec{\omega}$$

ولتكن $M(x_1,y_1,z_1)$ ومنه من شرط التوازي نجد :

$$\Longrightarrow \frac{x_1}{p_1}=\frac{y_1}{q_1}=\frac{z_1}{r_1}$$

من العلاقات السابقة نحصل على معادلتين وسيطتين للقاعدة وَ بحذف الزمن نحصل على القاعدة .

أما في الجملة المتماسكة

$$\forall \quad M \in s : \overrightarrow{oM} // \vec{\omega}$$

ولتكن $M(x,y,z)$ ومنه من شرط التوازي نجد :

$$\Longrightarrow \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

نحصل على معادلتين وسيطتين للمتدحرج وَ بحذف الزمن نحصل على المتدحرج

مثال : " سؤال دورة " إضافي

بين أن زوايا اولر تكفي لتعيين الحركة الدورانية لجسم صلب حول نقطة ثابتة (o)
ثم أوجد مركبات شعاع الدوران الآني على جملة محاور $(ouvk)$.

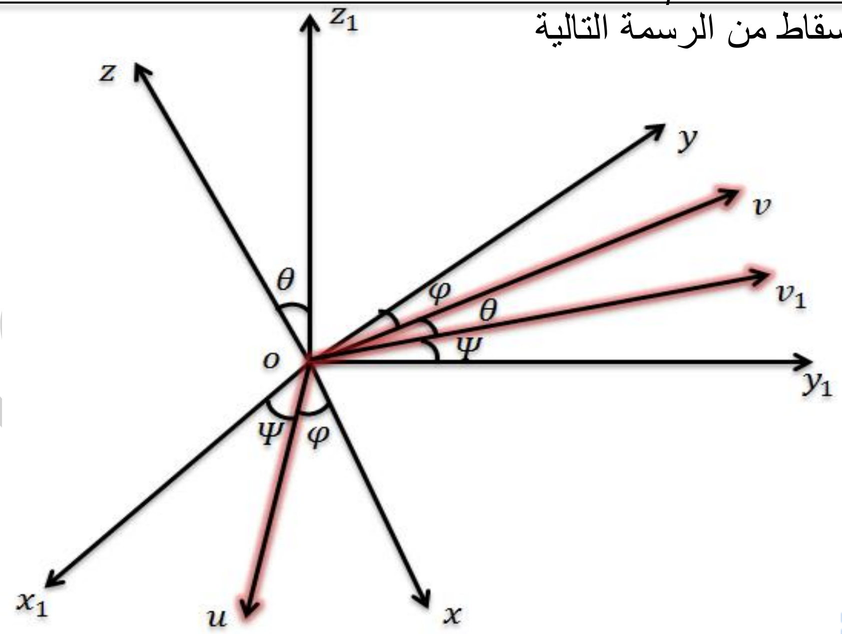
الحل

الطلب الاول

لدينا العلاقة التي استنتجناها من المحاضرة السابقة

$$ox_1y_1z_1 \xrightarrow[\psi]{\text{حول دوران } oz_1} ouv_1z_1 \xrightarrow[\theta]{\text{حول دوران } ou} ouvz \xrightarrow[\varphi]{\text{حول دوران } oz} oxyz$$

الناتجة عن الاسقاط من الرسمة التالية



الطلب الثاني :

لدينا علاقة شعاع الدوران العامة $\quad \vec{\omega} = \psi' \overrightarrow{k_1} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k}$

من نص المسألة حدد لنا الجملة التي نريد ان نسقط عليها ((لكن سنستخدم مصفوفات التحويل للسهولة))

أي علينا ايجاد $\overrightarrow{k_1}$ فقط إلى أن تظهر $\vec{v}$ لان لدينا كل من $\vec{k}, \vec{u}$

$$\overrightarrow{k_1} = \sin\theta \, \vec{v} + \cos\theta \, \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \psi' \sin\theta \, \vec{v} + \psi' \cos\theta \, \vec{k} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \theta' \vec{u} + \psi' \sin\theta \, \vec{v} + (\varphi' + \psi' \cos\theta) \vec{k}$$

مسألة

يتحرك جسم صلب بحركة دورانية حول نقطة ثابتة o في الفراغ وفق المعادلات :

$$\psi = t \quad , \quad \theta = 2t \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

المطلوب : 1) عين شعاع الدوران الآني

2) عين شعاع التسارع الآني

3) عين مخروطي القاعدة و المتدحرج

4)عين السرعة للنقطة M بحيث أن إحداثياتها بالنسبة للجملة المتماسكة هي $M(0,0,-1)$

الحل

(1

$$\vec{\omega} = \psi' \ \overrightarrow{k_1} + \theta' \ \vec{u} + \varphi' \ \vec{k} = \ \overrightarrow{k_1} + 2\ \vec{u}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \cos\theta\ \vec{k} + \sin\theta\ \vec{v} + 2\cos\varphi\ \vec{\imath} - 2sin\varphi\ \vec{\jmath}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \cos\theta\ \vec{k} + \sin\theta sin\varphi\ \vec{\imath} + \sin\theta cos\varphi\ \vec{\jmath} + 2cos\varphi\ \vec{\imath} - 2sin\varphi\ \vec{\jmath}$$

$$r = \cos\theta \quad , \quad q = \sin\theta cos\varphi - 2sin\varphi \quad , p = \sin\theta sin\varphi + 2cos\varphi$$

الجملة المتماسكة $\quad \vec{\omega} = \begin{cases} p = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\mathrm{t} + \sqrt{2} \\ q = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\mathrm{t} - \sqrt{2} \\ r = \cos 2t \end{cases}$

أما في الجملة الثابتة

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{k_1} + 2\ \vec{u} = \ \overrightarrow{k_1} + 2\cos\psi\overrightarrow{\imath_1} + 2\sin\psi\overrightarrow{\jmath_1} = 2\cos\psi\overrightarrow{\imath_1} + 2\sin\psi\overrightarrow{\jmath_1} + \overrightarrow{k_1}$$

الثابتة الجملة على لمركبات $\quad \vec{\omega} = \begin{cases} p_1 = 2\cos t \\ q_1 = 2\sin t \\ r_1 = 1 \end{cases}$

(2

$$\underbrace{\vec{\varepsilon}}_{\text{متماسكة}} = \begin{cases} p' = \sqrt{2}\cos 2t \\ q' = \sqrt{2}\cos 2t \\ r' = -2\sin 2t \end{cases} \quad , \quad \underbrace{\vec{\varepsilon}}_{\text{ثابتة}} = \begin{cases} {p_1}' = -2\sin t \\ {q_1}' = 2\cos t \\ {r_1}' = 0 \end{cases}$$

3) لنوجد المتدحرج

$$\overrightarrow{oo'}//\vec{\omega} \quad , \qquad o'(x,y,z) \in \Delta$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t+\sqrt{2}}=\frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t-\sqrt{2}}=\frac{z}{\cos 2t}$$

بحل (1) مع (3) $\quad x\cos 2t = z[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t+\sqrt{2}]$

بحل (2) مع (3) $\quad y\cos 2t = z\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t-\sqrt{2}\right]$

نربع ونجمع فنجد : $\quad (x^2+y^2)\cos^2 2t = (\frac{1}{2}\sin^2 2t+2)z^2$

وهي المعادلات الوسيطية للمتدحرج وهنا لم نستطع حذف الزمن

لنوجد القاعدة

$$\overrightarrow{oo_1}//\vec{\omega} \quad , \qquad o_1(x_1,y_1,z_1) \in \Delta$$

$$\frac{x_1}{2\cos t}=\frac{y_1}{2\sin t}=\frac{z_1}{1}$$

بالتربيع والجمع نجد :

$$x_1{}^2+y_1{}^2=4z_1{}^2 \Leftarrow \begin{cases} x_1=2\cos t\, z_1 \\ y_1=2\sin t\, z_1 \end{cases}$$

في مخروط القاعدة استطعنا حذف الزمن.

4) ايجاد سرعة النقطة M في الجملة المتحركة

$$\vec{v}(M)=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ p & q & r\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{q}\vec{i}+\boldsymbol{p}\vec{j}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(M)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t+\sqrt{2}\right]\vec{i}+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t+\sqrt{2}\right]\vec{j}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد علي فليون ** هديل سعيد ** خديجة الرفاعي