◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : السابعة ◄ عنوان المحاضرة: مودول الخارج

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـنبدء ببحث جديد هو مودول الخارج (القسمة)

"مراجعة "

تعريف :ليكن لدينا الجداء الديكارتي $A \times B = \{(a,b) \ ; a \in A, b \in B\}$

نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$ ولتكن $R \subseteq A \times B$ علاقة منطلقها A و مستقرها B وإذا كان لدينا : $A \times A = \{(a,b): a,b \in A\}$

$R \subseteq A \times A$ نسمي R علاقة على A

تعريف: نقول عن R أنها أنعكاسية إذا كان :

$$\forall a \in A \quad ; \quad aRa \Leftrightarrow (a,a) \in R$$

نقول عن R أنها تناظرية إذا كان

$$\forall a,b \in A \ ; \ aRb \Rightarrow bRa$$

نقول عن R أنها متعدية إذا كان

$$\forall a,b,c \in R \ ; \ \left.\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix}\right\} \Rightarrow aRc$$

تمرين (وظيفة) : هل $a \equiv b \, mod(n)$ انعكاسية ،تناظرية ،متعدية ؟؟

مودولات الخارج /مودول القسمة

تعريف: ليكن M مودولا على حلقة $\mathbb{R}$ وليكن N مودول جزئي من M ،نعرف على M علاقة ثنائية

نرمز لها بـ~ كما يلي :

$$\forall x, y \in M: x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N$$

تمهيدية : العلاقة $\sim$ المعرفة سابقا على M هي علاقة تكافؤ

الأثبات :

(شرط تحقق علاقة التكافؤ أن تكون $\sim$ انعكاسية - تناظرية- متعدية)

١- $\sim$ انعكاسية لأن $x \sim x \Leftrightarrow \forall x \in M; x - x = 0 \in N$ لأن N مودول جزئي من M

٢- $\sim$ تناظرية لأنه : $\underbrace{x \sim y \Rightarrow}_{\text{إذا كان}} \forall x, y \in M$ فهذا يعني أن $x - y \in N \Leftarrow y - x \in M$

$$y \sim x \Leftrightarrow$$

٣- $\sim$ متعدية لأنه $\forall, y, z \in M$ إذا كان $x - y \in N$ و $y - z \in N \Leftarrow x - z \in N \Leftrightarrow x \sim z$

$\Leftarrow N$ علاقة تكافؤ ..

ملاحظة : إن أي علاقة تكافؤ على مجموعة ما تجزأ هذه المجموعة إلى صفوف تكافؤ أي أنه في هذه الحالة فإن M يتجزأ إلى صفوف تكافؤ حيث أن صف تكافؤ العنصر $x \in M$ هو $x + N$ نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ بالرمز M/N حيث

$$M/N = \{x + N; x \in M\}$$

تمرين : (توضيح)

إذا كانت $K: a \equiv b \bmod (3)$ علاقة تكافؤ (أي يوجد صفوف تكافؤ)

أوجد صف تكافؤ العدد ١ بالنسبة لهذه العلاقة :

الحل:

إن $\underbrace{a \equiv}_{\text{يطابق}} mod\ (3)$ يكتب على الشكل $3/\ a - b$ أي $a - b = 3k$

(لنفرض أحد العنصرين a أو b يساوي ١)

لنفرض أن $(b = 1)$،$\Leftarrow a - 1 = 3k$

$$\Rightarrow a = 3k + 1$$

والان لنوجد صف التكافؤ

$$k = 0 \quad \Rightarrow a = 1$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow a = 4$$

$$k = -1 \quad \Rightarrow a = -2$$

$$\vdots$$

$$\bar{1} = [1] = \{\dots.,-5,-2,1,4,7,\dots.\}$$

(ويكون حاصل طرح كل عددين متتاليين ٣) وبنفس الطريقة نوجد

$$[0] = \bar{0} = \{\dots..,-3,0,3,6,\dots..\}$$

$$[2] = \bar{2} = \{\dots..,-1,2,5,8,\dots.\}$$

$$[3] = \bar{3} = \{\dots.,-3,0,3,6,\dots.\}$$

نلاحظ أن $[0] = [3]$ لذلك نتوقف

تمرين : نعرف على Z العلاقة R كما يلي :

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b \; mod(3)$$

١- أثبت أن R علاقة تكافؤ
٢- أوجد صفوف التكافؤ

الحل:

١- واضح (بأول المحاضرة)

٢- لدينا $a \equiv b \; mod\ (3) \Leftrightarrow 3/\ a - b$

$$\exists k \in Z: a - b = 3k$$

لإيجاد صف تكافؤ b مثلا هو :

$$[b] = \{x \in Z; x \equiv b \; mod\ (3)\}$$
$$= \{x \in Z\ ; 3/x - b\}$$
$$= \{x \in Z; \exists k \in Z\ \ : x - b = 3k\}$$

بناء على ذلك فإن :

$$[0] = \{x \in Z; \exists k \in Z: x - 0 = 3k\}$$

$$= \{x \in Z : x = 3k\ ; k \in Z\}$$

$$= \{\dots..,-6,-3,0,3,6,\dots\dots\}$$

$$[1] = \{x \in Z: x = 3k + 1\ ; k \in Z\}$$

$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

مبرهنة :

إذا كان N مودولا جزئيا من مودول M على حلقة $\mathbb{R}$ فإن علاقة التكافؤ $(\sim)$ المعرفة سابقا :

$$(x \sim y) \Leftrightarrow x \equiv y \bmod N)$$

متوائمة (معرفة جيدا)مع قانوني التشكيل الداخلي $(+)$ و الخارجي $(.)$المعرفين على M/N بالشكل :

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$$

$$a(x + N) = ax + N$$

الإثبات :

$$\forall y, y', x, x' \in M:$$

$$\left.\begin{matrix} x \equiv x' \bmod N \\ y \equiv y' \bmod N \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x + y) \equiv (x' + y') \bmod N$$

وإن : $\forall \alpha \in \mathbb{R}: x \equiv x' \bmod N \Rightarrow \alpha x \equiv \alpha x' \bmod N$

لكن لدينا : $x \equiv x' \bmod N \Leftrightarrow x - x' \in N$

$$y \equiv y' \bmod N \Leftrightarrow y - y' \in N$$

نجمع $\Leftarrow (x + y) \equiv (x' + y') \bmod N \Leftrightarrow (x + y) - (x' + y') \in N$

كذلك : $\alpha x \equiv \alpha x' \bmod N \Leftrightarrow \alpha x - \alpha x' \in N$

$$\alpha(x - x') \in N \Leftarrow$$

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا هجع – رغد جودة – بكر مشرف