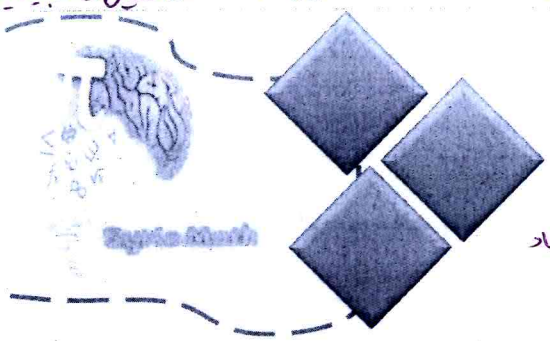


المحاضرة الثامنة

نظري ☑
عملي ☐

◄ دكتور المادة: غضون الجيرودي

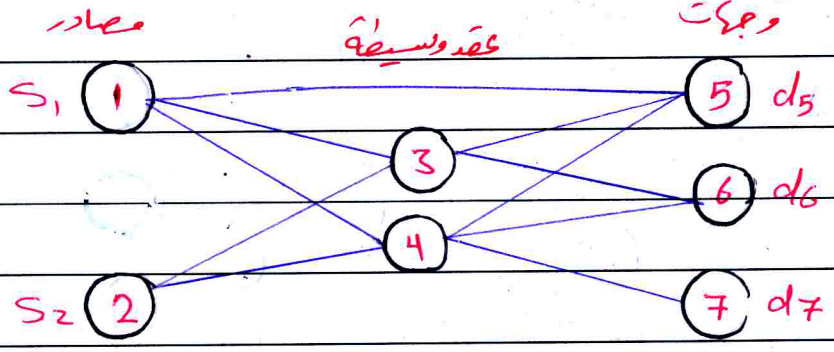
◄ عنوان المحاضرة: مسألة الشحن والإسناد + طريقة هنغاريين

مسألة الشحن :

تهدف المسألة لنقل البضائع من المصادر الى الوجهات بأقل كلفة ممكنة وذلك عبر عقد بسيطة الشرط هذه العقد ان الكمية الداخلة اليها تساوي الكمية الخارجة منها

النموذج الرياضي :

لنكتب البيان الآتي :



• نرقم جميع العقد بترتيب من 1 الى عدد جميع العقد بالترتيب

لنكن c_{ij} كلفة النقل من العقدة i الى العقدة j .

لنكن x_{ij} الكمية المنقولة من العقدة i الى العقدة j .

دالة الهدف

$$Min\ (c_{15}x_{15} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{35}x_{35} + c_{36}x_{36} + c_{45}x_{45} + c_{46}x_{46} + c_{47}x_{47})$$

شروط دالة الهدف

1) شروط المصادر :

$$x_{15} + x_{13} + x_{14} \leq S_1$$

$$x_{23} + x_{24} \leq S_2$$

2) شروط الوجهات :

$$x_{15} + x_{35} + x_{45} = d_1$$

$$x_{36} + x_{46} = d_6 \quad , \quad x_{47} = d_7$$

3) شرط توازن العرض والطلب : " الكمية الداخلة = الكمية الخارجة "

$$x_{13}+x_{23}=x_{35}+x_{36} \iff x_{13}+x_{23}-x_{35}-x_{36}=0$$

$$x_{14}+x_{24}=x_{45}+x_{46}+x_{47} \iff x_{14}+x_{24}-x_{45}-x_{46}-x_{47}=0$$

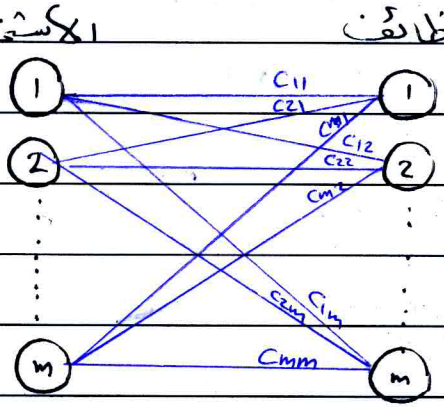
4) شرط عدم السلبية :

$$x_{ij} \geq 0$$

مسألة الإسناد :

تهدف هذه المسألة الى تحقيق اقل كلفة وذلك بإسناد الأعمال

- حيث لدينا m شخص و m وظيفة
- لتكن C_{ij} كلفة عمل الشخص i للوظيفة j
- نفرض ان كل الأشخاص يجب ان يعملو وكل الوظائف يجب ان تشغل وان كل شخص يستطيع ان يشغل اي وظيفة
- كل شخص يجب ان يقوم بوظيفة واحدة فقط والوظيفة يجب ان تأخذ من شخص واحد فقط



المتحولات :

لتكن $x_{ij}=1$ اذا قام الشخص i بالوظيفة j

$x_{ij}=0$ اذا لم يقم الشخص i بالوظيفة j

دالة الهدف :

$$\text{Min } F = C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+\cdots+C_{1m}x_{1m}$$
$$+C_{21}x_{21}+C_{22}x_{22}+\cdots+C_{2m}x_{2m}$$
$$\vdots$$
$$+C_{m1}x_{m1}+C_{m2}x_{m2}+\cdots+C_{mm}x_{mm}$$

$$\text{Min } F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}x_{ij}$$

شروط المسألة:

1- شروط الأشخاص: أن يقوم كل شخص بوظيفة واحدة

شرط الشخص الأول: $\sum_{j=1}^{m} x_{1j} = 1$

شرط الشخص الثاني: $\sum_{j=1}^{m} x_{2j} = 1$

$\vdots$

شرط الشخص i: $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall i=1,\dots m$

"إذا كان عدد الأشخاص أكبر من عدد الوظائف $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \quad (\forall i=1,\dots m)$"

"أي يمكن للشخص أما أن يشغل وظيفة واحدة كحد أكثر أو أنه لا يقوم بشيء"

2- شروط الوظائف

شرط الوظيفة j: $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = 1 \quad \forall j=1,\dots m$

بالإضافة إلى: $x_{ij} \in \{0,1\} \quad i,j = 1,2,\dots m$

النموذج الرياضي:

$$\text{Min } f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} e_{ij} x_{ij}$$

$$s.t: \quad x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} = 1 \qquad i=1,\dots m$$

"شرط الأشخاص وهي m شرط"

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = 1 \qquad j=1,\dots m$$

"شرط الوظائف وعددها m شرط"

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{إذا: } i,j = 1,\dots m$$

شروط إضافية:

1- إذا كان الشخص k لا يستطيع القيام بالعمل f:

$$x_{kf} = 0$$

2- إذا كان الشخص t مسموح له القيام بـ a عمل على الأكثر:

$$x_{t1} + x_{t2} + \dots + x_{tm} \leq a$$

3- يجب أن تشغل الوظيفة p من قبل b شخص

$$x_{1p} + x_{2p} + \dots + x_{mp} = b$$

طريقة هنغاريه لحل مسألة الاسناد :

تستخدم هذه الطريقة لحل مسائل الاسناد ج m شخص و m وظيفة

1- فاذا كان عدد الاشخاص لايساوي عدد الوظائف نضيف اما اشخاص اضافية او وظائف اضافية لتحقيق المساواة وذلك بكلفة تساوي الصفر

2- بفرض الشخص i لا يستطيع القيام بالوظيفة j عندها نضيف كلفة تساوي عدد كبير موجب M : $C_{ij}=M$

مراحل الخوارزمية

1- من اجل كل سطر اطرح اصغر عدد في هذا السطر من كل عنصر من عناصر السطر

2- من اجل كل عمود اطرح اصغر عدد في هذا العمود من كل عنصر من عناصر العمود

3- ارسم اصغر عدد ممكن من الخطوط لتغطي كل الاصفار (الخط اما سطري او عمودي)

اذا كان عدد هذه الخطوط يساوي m فان الخوارزمية تنتهي فالحل هو الحل الامثل

4- اختار اصغر عدد غير مغطى بالخطوط السابقة وليكن k

اطرح k من كل الارقام غير المغطاة بخط

اضف k الى كل رقم مغطى بخطين

الاعداد المغطاة بخط واحد تبقى كما هي .

مسألة

تم اسناد الاشخاص W, F, G, a على ثلاث وظائف بحيث كلفة عمل الشخص i بالوظيفة j معطاة بالجدول الآتي : اكتب الاستراتيجية المثلى لتوزيع الاشخاص على الوظائف لتحقيق اقل كلفة .

	1	2	3	ذ وهمية (4)
W	50	36	16	0
F	28	30	18	0
G	35	32	20	0
a	25	25	14	0

ملاحظة: أضفنا وظيفة وهمية بتكلفة معدومة ذلك لتساوي عدد الأشخاص مع عدد الوظائف.

نأخذ مصفوفة الكلفة

50	36	16	0 ← أصغر عدد
28	30	18	0 ← أصغر عدد
35	32	20	0 ← أصغر عدد
25	25	14	0 ← أصغر عدد
أصغر عدد	أصغر عدد	أصغر عدد	أصغر عدد

- من أجل السطر "1" نطرح أصغر عدد في هذا السطر وهو "الصفر" من كل عناصر السطر ونكرر هذه العملية من أجل بقية الأسطر.

" المصفوفة تبقى كما هي لأننا طرحنا "الصفر" من جميع الأسطر

- من أجل العمود الأول نطرح أصغر عدد في هذا العمود وهو "25" من كل عناصر العمود ونكرر هذه العملية من أجل بقية الأعمدة.

25	11	2	0 ← أصغر عدد غير مغطى
3	5	4	0
10	7	6	0
0	0	0	0 ← عدد مغطى بسطرين

عدد الخطوط هو ($n=2$) أي لا يساوي ($m=4$) نكمل الحل فالحل ليس حل أمثل

- نختار أصغر عدد غير مغطى بالخطوط السابقة وهو العدد "2"
- نطرح العدد "2" من كل الأرقام غير مغطاة بخطوط
- نضيف العدد "2" الى كل رقم مغطى بخطين

23	9	0	0
1	3	2	0
8	5	4	0
0	0	0	2

نرسم اصغر عدد ممكن من الخطوط (الافقية والعمودية) لتغطية كل الاصفار.
نغطي السطر الاخير والعمود الاخير لاحتوائهما على معظم الاصفار
يبقى لدينا صفر في السطر الاول العمود الثالث لذلك اما نغطي العمود الثالث أو السطر الاول

- نلاحظ ان عدد الخطوط هو "n=3" وهو يساوي "m=4"

لذلك نكمل الحل والحل ليس حل امثل...

- نختار اصغر عدد غير مغطى بالخطوط السابقة وهو "1"
- نطرح العدد "1" من كل الارقام غير المغطاة بخطوط
- نضيف العدد "1" الى كل رقم مغطى بخطين معاً
- الارقام المغطاة بخط واحد تبقى كما هي فيصبح لدينا الجدول التالي

22	8	0	0
0	2	2	0
7	4	4	0
0	0	1	3

اصبح عدد الخطوط $m=n=4$ وبالتالي الحل هو الحل الامثل التالي:

يقوم الشخص الاول بالوظيفة 3 أو 4

يقوم الشخص الثاني بالوظيفة 1 أو 4

يقوم الشخص الثالث بالوظيفة 4

يقوم الشخص الرابع بالوظيفة 1 أو 2

نختار الوظائف المناسبة من اماكن وجود الاصفار

أولاً ننظر الى الشخص الذي يقوم بوظيفة واحدة ونكتف عنه باقي الأشخاص
الشخص الثالث يقوم بوظيفة واحدة فقط وهي الوظيفة 4
وعنه اسندنا للشخص الثالث الوظيفة 4
وبالتالي يصبح الحل:

الشخص C يقوم بالوظيفة 3
الشخص F يقوم بالوظيفة 1
الشخص G يقوم بالوظيفة 4 ("أي لا يقوم بأي وظيفة لأنه هي 2")
الشخص A يقوم بالوظيفة 2

وذلك بكلفة:

$$16 + 28 + 0 + 25 = 69$$

(16: شخص 1، 28: شخص 2، 0: شخص 3، 25: شخص 4)

وعنه 69 هي أقل كلفة ممكنة

انتهت المحاضرة