◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة: الثالثة عشر

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية من المراتب العليا

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- المعادلات التفاضلية من المراتب العليا

٢- المعادلات التفاضلية الغير محلولة بالنسبة للمشتق

٣- امثلة

المعادلات التفاضلية من المراتب العليا و الغير محلولة بالنسبة للمشتق

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \dots (1)$$

يكون الحل العام لها:

$$\phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \dots (2)$$

وبحالة خاصة:

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0 \dots (3)$$

١- يمكن الكتابة بالشكل:

$$y^{(n)} = f(x) \dots (4)$$

و الحل العام لها بإجراء عدة تكاملات.

٢- إذا كان y حل خاص لها نجري التحويل: $y = y_1 + z \Rightarrow z^{(n)} = 0$

$$z = P_{n-1}(x) = c_{n-1}.x^{n-1} + c_{n-2}.x^{n-2} + \dots + c_1.x + c_0$$

أن الحل الخاص: $y^{(n)} = f(x)$

$$y_1 = \int dx \int dx \dots \int f(x).dx$$

مثال بسيط: $y = e^x$

الحل الخاص لها: $y_1 = e^x$

$$y = y_1 + P_{n-1}(x)$$

$$y = e^x + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

مثال: أوجد الحل العام:

$$y''' = e^x$$

ثمّ أوجد الحل الشاذ المحقق للشروط:

$$y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 2$$

الحل

$$y''' = e^x$$

$$\overset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow} y'' = e^x + c_1$$

$$\overset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow} y' = e^x + c_1.x + c_2$$

$$\overset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow} y = e^x + \frac{1}{2}.c_1.x^2 + c_2.x + c_3$$

نعوض قيمة x حسب المعطاة في نص السؤال لننتهي إلى النتيجة:

$$y''(0) = 1 \Rightarrow 1 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 + 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow 1 + 0 + 0 + c_3 = 2 \Rightarrow c_3 = 1$$

نعوض قيم c فنحصل على المعادلات:

$$y = e^x + 1 \,, y' = e^x \,, y'' = e^x$$

مثال: أوجد الحل العام:

$$y''^2 - 5y'' + 6 = 0$$

الحل

◄تذكرة:

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2 - bx + c = 0 \Rightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0}}$$

$$(y'' - 2)(y'' - 3) = 0$$

إمّا: $y'' - 2 = 0 \Rightarrow y'' = 2 \Rightarrow y' = 2x + c_1 \ldots *$

أو: $y'' - 3 = 0 \Rightarrow y'' = 3 \Rightarrow y' = 3x + c_3 \ldots **$

بمكاملة * نحصل على: $y = x^2 + c_1x + c_2$

بمكاملة ** نحصل على: $y = \frac{3x^2}{2} + c_3x + c_4$

المعادلات التفاضلية التي لا يمكن حلها بالنسبة ل y':

نسمي المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى التي تحوي المشتق y' بالمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى وغير محلولة بالنسبة للمشتق وتكتب بالشكل: $F(x,y,y') = 0 \ldots (1)$ وبالتالي نقول عن

$\emptyset(x,y) = 0$ حلا ضمنيا للمعادلة التفاضلية (1) اذا عرفت هذه المعادلة y كدالة ضمنية للمتحول x وكانت هذه الدالة حلا للمعادلة (1) وكذلك نقول: $x = \psi(t) \quad \& \quad y = \varphi(t)$ تمثل حلا وسيطي للمعادلة (1) ومن هذه المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى غير محلولة بالنسبة للمشتق:

$$y'^n + A_1(x,y)y'^{n-1} + A_2(x,y)y'^{n-2} + \cdots \ldots . + A_{n-1}(x,y)y' + A_n(x,y) = 0$$

يمكن تفرقة المعادلة السابقة الى عوامل من الدرجة الأولى في y' على الشكل:

$$[y' - f_1(x,y)][y' - f_2(x,y)] \ldots . . [y' - f_n(x,y)] = 0$$

حيث ان: $f_1, f_2, \ldots \ldots, f_n$ دوال معرفة ومستمرة في المتغيرين x, y وبالتالي:

$$y' - f_k(x,y) = 0 \ldots . . (\&) \qquad ; k\epsilon\{1,2,3,4, \ldots . . , n\}$$

من اجل الحصول على التكامل العام للمعادلة الاصلية يجب علينا إيجاد التكامل العام لكل من المعادلات التفاضلية $(\&)$ فنحصل على n تكامل عام من الشكل:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_1(x,y,c_1) = 0 \\ \varphi_2(x,y,c_2) = 0 \\ .. \\ .. \\ .. \\ .. \\ \varphi_n(x,y,c_n) = 0 \end{array}\right\}$$

حيث:
$(c_1, c_2, .. c_3)$
هي ثوابت
التكامل

جداء هذه الحلول يعطينا الحل العام:

$$F(x,y,c) = [\varphi_1(x,y,c_1)][\varphi_2(x,y,c_2)] \ldots . [\varphi_n(x,y,c_n)] = 0$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

انتهت المحاضرة

"أكبر ضعف هو الاستسلام وأفضل طريقة للنجاح هي المحاولة أكثر من مرة واحدة"

إعداد: ماريا عيد*علا الدالاتي*عبير خزنه كاتبي