المحاضرة التاسعة

نظري ☑ عملي ☐

◀ دكتور المادة: شوقي الراشد

◀ عنوان المحاضرة: مراجعات بنى 2

علاقة القسمة (الباقي): لتكن R حلقة واحدية وتبديلية و I مثالي في R

نعرف علاقة التكافؤ $\sim$ على R بالشكل التالي $x,y\in R;\ x\sim y \iff x-y\in I$

$\iff \exists i\in I;\ x-y=i \iff \exists i\in I;\ x=i+y$

عندئذ نعرف صف التكافؤ للعنصر x كالتالي

$\bar{x}=[x]=\{y\in R;\ \exists i\in I;\ \cancel{x}=y+i\}$

$=\{y\in ;\ \exists i\in I;\ y=x-i\}$

$=\{x+i;\ i\in I\}=x+I$

نرمز لمجموعة كل صفوف التكافؤ بالرمز R/I نزود هذه المجموعة بقانوني تشكيل داخليين: $R/I=\{\bar{x}=x+I;\ x\in R\}$

$\forall \bar{x},\bar{y}\in R/I;\ \bar{x}=x+I,\ \bar{y}=y+I$

$\bar{x}+\bar{y}=(x+y)+I$

$\bar{x}.\bar{y}=(x.y)+I \Rightarrow (R/I,+,.)$ حلقة

وابدالية تبديلية واحدية واحدها هو $\bar{1}=1+I$

Note: $x\in I \iff \exists i\in I;\ x=i+0 \Rightarrow x\sim 0$

$\Rightarrow x+I=0+I=I$

أمثلة: لتكن $R=(\mathbb{Z},+,.)$ و $I=\langle 3\rangle$ وبالتالي نكون

$R/I=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$

المبرهنة الأساسية: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $\emptyset\neq I\subseteq R$ و

$I\triangleleft R \iff I$ نواة لتشاكل حلقي.

مبرهنة التماثل الأساسية: إذا كان $\varphi : R \to S$ تشاكل حلقي فإن:

1) $R/\ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$

2) $R/\ker(\varphi) \cong S$ وذلك إذا كان φ غامر

تعريف: إذا كان $\varphi : R \to S$ تشاكل حلقي و I مثالي في R:

1) يبرهن فيما إذا كان $\varphi(I)$ مثالي في S.

2) إذا كان φ دالة غامرة فإن $\varphi(I)$ مثالي في S

ملاحظة: المثاليات في R/I هي $J/I \trianglelefteq R/I \iff J \supseteq I,\ J \trianglelefteq R$

مبرهنة: لتكن R حلقة تبديلية واحدية و $I, J \trianglelefteq R$ فإن

1) $I+J/I \cong J/I\cap J$

2) إذا كانت $I \subseteq J$ فإن $\frac{R/I}{J/I} \cong \frac{R}{J}$

تعريف: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $P \ntrianglelefteq R$ و $M \ntrianglelefteq R$

نقول عن P انه مثالي أولي إذا تحقق واحد من الشروط الثلاثة التالية:

1) $x, y \in R : x.y \in P \Rightarrow x \in P \vee y \in P$

2) $I, J \trianglelefteq : I.J \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P \vee J \subseteq P$

3) حلقة واحدية R/P : $I.D$

ونرمز لمجموعة كل المثاليات الأولية بالرمز

$Spec(R) = \{P \trianglelefteq R :$ مثالي أولي في P $R\}$

مثال: $R = (\mathbb{Z}, +, .)$ إن $Spec(\mathbb{Z}) = \{<P> :$ عدد أولي $P\} \cup \{<0>\}$

الحل: لنأخذ $P = <0>$ فإن $x, y \in \mathbb{Z} : x.y \in <0>$

$\Rightarrow x.y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

ومنه $<0>$ مثالي أولي

Scanned by CamScanner

لأجل P عدد أولي في Z بفرض $x, y \in Z : x.y \in \langle P \rangle$

$\Rightarrow P \mid x.y \Rightarrow P \mid x \vee P \mid y$

$\Rightarrow x \in \langle P \rangle \vee y \in \langle P \rangle$

ومنه $\langle P \rangle$ مثالي أولي

ملاحظة: $r \in \langle a \rangle \Leftarrow \exists b \in R : r = a.b$

((وهذا ما اعتمدنا عليه في الحل)) $\Rightarrow a \mid r$

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية وواحدية و $M \subsetneq R$ نسمي M مثالي أعظمي في R إذا تحققت إحدى الشروط التالية:

1) $I \trianglelefteq R : M \subsetneq I \subseteq R \Rightarrow R = I$

2) $I \trianglelefteq R : M \subseteq J \subsetneq R \Rightarrow M = J$

أو دمج الشرطين

$M \subseteq I \subseteq R \Rightarrow M = I \vee I = R$

3) R واحدية : R/M حقل

ونرمز لمجموعة كل المثاليات الأعظمية في R بالرمز

$M - Spec(R) = \{M \trianglelefteq R\}$

مثال: $M - Spec(Z) = \{\langle P \rangle \trianglelefteq Z ;$ P عدد أولي $\}$

لأن Z هي ID ومنه $Z_p \cong \frac{Z}{\langle P \rangle}$ وإن Z_p هي ID منتهية

ومنه Z_p حقل أي $\frac{Z}{\langle P \rangle}$ هي حقل $\Leftarrow \langle P \rangle \trianglelefteq Z$ حسب الشرط الثالث.

تمرين: لتكن R حلقة تبديلية أثبت ما يلي:

1) بيّن أنه ليس بالضرورة أن يكون كل مثالي أعظمي في R هو مثالي أولي.

2) إذا كانت R حلقة واحدية فإن كل أعظمي هو أولي. 3) بيّن أنه ليس بالضرورة أن يكون كل أولي أعظمي.

تعريف: لتكن R حلقة واحدية تبديلية

1) نعرف الجذر الأساسي للحلقة R كلياً انه تقاطع كل المثاليات الأولية في R ونرمز له بالرمز

$$N(R) = \bigcap_{P \in Spec(R)} P \trianglelefteq R$$

2) نعرف اساس جاكسون في R:

$$J(R) = \bigcap_{P \in M\text{-}Spec(R)} P \trianglelefteq R$$

3) نعرف جذر المثالي I في R: $\sqrt{I} = \{x \in R : x^n \in I, n \geq 0, n \in \mathbb{Z}\}$

امثلة: $J(\mathbb{Z}) = \langle 0 \rangle$ و $N(\mathbb{Z}) = \langle 0 \rangle$

مبرهنة: $\forall b \in R : 1 - a.b \in U(R) \Leftrightarrow a \in J(R)$

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $I \ntrianglelefteq R$ عندئذ يوجد مثالي اعظمي

$$\exists M \trianglelefteq R : I \subseteq M$$

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $I \trianglelefteq R$ فإن:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P \in Spec(R)} P$$

نتيجة: ليكن $I \trianglelefteq R$ و $I = \langle 0 \rangle$ فإن:

$$\sqrt{0} = \bigcap_{0 \subseteq P \in Spec(R)} P = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$$

وذلك لان الصفر ينتمي لأي مثالي.

انتهت المحاضرة

اعداد وتقديم:

Ahmad Abo Altot

المحاضرة العاشرة

◄ دكتور المادة: شوقي الراشد

◄ عنوان المحاضرة: مراجعات بنى 2

نظري ☑ عملي ☐

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $I \trianglelefteq R$, $P_1, \dots, P_n \trianglelefteq R$

و $P_1, \dots, P_{n-2} \in Spec(R)$ إذا كان $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ فإن

$\exists i \in \{1, \dots, n\} : I \subseteq P_i$

الإثبات: بالاستقراء الرياضي على n.

- لأجل $n=1$ فإن $I \subseteq P_1$ محققة.
- نفرض صحة القضية لأجل $n-1$ أي:

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n-1\} : I \subseteq P_i$$

- لنثبت أن القضية صحيحة لأجل n

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i = \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i \cup P_n$$

لنفرض جدلاً أن $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \not\subseteq P_i$

وبالتالي $\exists x \in I : x \notin P_i ; \forall i \in \{1, \dots, n\}$

لكن نميز الحالات الثلاثة

- $x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n-1\} : x \in I \subseteq P_i$

وهذا مرفوض ب $x \notin P_i$ ومنه الفرض الجدلي خاطئ.

- $x \in P_n \Rightarrow i = n \Rightarrow x \in I \subseteq P_n$

وهذا مرفوض لأن $\forall i \in \{1, \dots, n\} : x \notin P_i$ ومنه الفرض الجدلي خاطئ

- $x = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} ; x_i \in P_i \Rightarrow x \in P_i ; \exists i \in \{1, \dots, n\}$

وهذا مرفوض أيضاً ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي أن:

$$\exists i \in \{1, \dots, n\} : I \subseteq P_i$$

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية واحدية. نقول عن R أنها حلقة محلية إذا كان يوجد مثالي أعظمي وحيد في R أي

R حلقة محلية $\Leftrightarrow J(R) \triangleleft \cdot R$

* كل حقل هو حلقة محلية.

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية. الشروط التالية متكافئة:

1) R محلية.

2) $\forall a \in M ; b \in R ; 1 - a.b \in U(R)$

3) $\forall a \in M \Rightarrow 1 + a \in U(R)$

4) $S = R \setminus U(R) \triangleleft R$

البرهان: $1 \Rightarrow 2$: إن $J(R)$ مثالي في R

$\Rightarrow \exists! M : J(R) \triangleleft \cdot R \Rightarrow \forall a \in J(R) ; b \in R$

$\Rightarrow 1 - a.b \in U(R)$

$2 \Rightarrow 1$ للإثبات أن R محلية يجب إثبات أن $J(R) = M$

أن $M \supseteq J(R)$ لنثبت الاحتواء المعاكس

$\forall a \in M \Rightarrow \forall b \in R ; 1 - a.b \in U(R)$

$\Rightarrow a \in J(R) \Rightarrow M \subseteq J(R)$

ومنه $M = J(R)$ أي أن R محلية.

$2 \Rightarrow 3$: بما أن R واحدية ولدينا $b = -1$ فإن

$\forall a \in M \Rightarrow 1 + a \in U(R)$

$3 \Rightarrow 2$

$\forall b \in R , a \in M \Rightarrow -a.b \in M \Rightarrow$

$1 - a.b \in U(R)$

$3 \Leftarrow 4$: لنثبت أن S مثالي بما أن $0 \notin U(R) \Rightarrow 0 \in R/U(R) = S$

ومنه $S \neq \emptyset$

- لنبرهن أن $a-b \in S$ لنفرض جدلاً أنه $\forall a,b \in S : a-b \notin S$

$\Rightarrow a-b \in U(R) : \exists x \in R : 1 = x(a-b) = ax - bx$

$a \in S \Rightarrow a \notin U(R) \Rightarrow \langle a \rangle \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$

$\Rightarrow \exists M_1 \triangleleft R : \langle a \rangle \subseteq M_1$

وأيضاً $b \in S \Rightarrow b \notin U(R) \Rightarrow \langle b \rangle \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$

$\Rightarrow \exists M_2 \triangleleft R : \langle b \rangle \subseteq M_2$

ومنه $\underbrace{ax}_{\in M_1} = \underbrace{1+bx}_{\in U(R)} \in M_1 \Rightarrow M_1 = R$

حسب مبرهنة يوجد تناقض للطلب في $S \Leftarrow R = S$

ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي $a-b \in S$

- لنبرهن أن $a.b \in S$: $\forall b \in R : a \in S$

لنفرض جدلاً أن $a.b \notin S$ وبالتالي $a.b \in U(R)$ وبالتالي

$\exists x \in R : 1 = a.bx = a.\underbrace{z}_{=b.x} \in U(R)$

ومنه $a \in U(R)$ وهذا تناقض وبالتالي $a.b \in S$ ومنه

$S \trianglelefteq R$

$4 \Leftarrow 3$: لنعرف المجموعة $M = \{I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R : 1+a \in U(R) ; a \in I\}$

إن $S \in M \neq \emptyset$ لأن $1 \notin S : S \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$

وأن $\forall a \in S : 1+a \in U(R) \Rightarrow M \neq \emptyset$

ومنه $(M, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$

سلسلة متزايدة في M ومنه $I = \bigcup_{i \geq 1} I_i \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ لأنها سلسلة لا تحتوي 1

وأن I مثالي وإذا فرضنا جدلاً أن $I=R \Rightarrow 1\in I$ ومنه $\exists i_0\geq 1 : 1\in I_{i_0}$

ويكون $I_{i_0}=R$ وهذا تناقض كون $I_{i_0}\in M$ وبالتالي $I\neq R$

ولنثبت أن I حد أعلى وموجود في M، واضح أنه حد أعلى لأنه اجتماع كل المثاليات وأنه موجود في M لأن

$\forall a\in I \Rightarrow \exists i\geq 1 : a\in I_i \Rightarrow 1+a\in U(R)$

ومنه هو حد أعلى للسلسلة في M وبالتالي حسب زورن يوجد عنصر $\mathcal{M}\in M$ أعظمي

وبالتالي يكون $\mathcal{M}$ مثالي أعظمي في R يحقق $\forall a\in \mathcal{M} : 1+a\in U(R)$ لنثبت أنه تام

يوجد $\mathcal{M}\subsetneq J\subseteq R$ فإن $\exists b\in J : b\notin \mathcal{M} \Leftarrow 1+b\in U(R)$

$\Rightarrow \exists \mathcal{M}' \trianglelefteq R : \langle 1+b\rangle \subseteq \mathcal{M}'$

$\Rightarrow 1=1+b-b\in S$

وهذا تناقض ومنه $\mathcal{M}\trianglelefteq R$ وهو المطلوب.

$1 \Leftarrow 4$ أن S مثالي في R ومنه S مثالي أعظمي في R (تمرين الأعظمي في الحلقات المحلية)

لنفرض أنه يوجد مثالي أعظمي في R $\exists \mathcal{M}\trianglelefteq R : \mathcal{M}\neq S$

$\Rightarrow \exists x\in \mathcal{M} : x\notin S \Rightarrow x\in U(R) \Rightarrow \mathcal{M}=R$

ومنه يوجد مثالي أعظمي وحيد وهو S.

$4\Leftarrow 1$ تحل بنفس طريقة $4\Leftarrow 3$ فقط بتبديل كل $\mathcal{M}$ بـ $J(R)$

وذلك لأن R محلية فإن $J(R)=\mathcal{M}$

تمهيدية زورن: لتكن M مجموعة غير خالية مرتبة جزئياً $(M,\leq)$، إذا كانت أي سلسلة متزايدة من عناصر M لها حد أعلى في M فإنه يوجد عنصر أعظمي في M.

تمرين: إذا كان $S=R/U(R)\trianglelefteq R$ فإن S مثالي أعظمي في R. (طريقة التمرين المحاضرة)

إعداد وكتابة: Ahmad Abo Altot