◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : الخامسة ◄ عنوان المحاضرة: التشاكلات المودولية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـ مبرهنات في التشاكلات المودولية

مبرهنة : إذا كان $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا وكان A مودول جزئي من M و B مودول جزئي من N

فإن : ١- $\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A + Ker(f)$

٢- $\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) = B \cap Im(f)$

الاثبات:

١ـ من جهة أولى : $\forall x \in \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right)$ فإن $f(x) \in \vec{f}(A)$ وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث :

$f(x) = f(a)$ ومنه $f(x-a) = 0$ ومن ثم $x - a \in Ker(f)$

ومنه $x \in A + Ker(f)$

$$\Rightarrow \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) \subseteq A + Ker(f)$$

ومن جهة ثانية: $\forall x \in A + Ker(f)$ يوجد $b \in Ker(f)$, $a \in A$

بحيث $x = a + b$ وبالتالي $f(x) = f(a) + 0$

ومن ثم $f(x) \in \vec{f}(A)$ أي $x \in \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right)$

$$\Leftarrow A + Ker\,(f) \subseteq \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right)$$

ومن الاحتوائين نجد $\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A + Ker(f)$

٢ـ إن $\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) \subseteq B \cap Im(f)$ وضوحا

ومن جهة ثانية $\forall y \in B \cap Im(f)$ فإن $y \in B$, $y \in Im(f)$ و هذا يعني انه $y \in B$

يوجد $x \in M$ بحيث : $y = f(x) \in Im(f)$

أي ان $y = f(x) \in B$

$$\Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(B)$$
$$\Rightarrow f(x) \in \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right)$$

هذا يعني أن $B \cap Im(f) \subseteq \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right)$

⇐ من الاحتوائين نجد : $B \cap Im(f) = \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right)$

تمرين: (وظيفة ينتج من المبرهنة السابقة) إذا كان $f: M \to N$ تشاكل مودولي وكان A مودول جزئي من M و B مودول جزئي من N فإنه :

١- $Ker(f) \subseteq A \Leftrightarrow \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A$

٢- $B \subseteq Im(f) \Leftrightarrow \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) = B$

مبرهنة : (من ٢ إلى ٥ وظيفة)

إذا كانت $f: M \to N$ و $g: N \to P$ تشاكلين مودوليين على حلقة $\mathbb{R}$ فإن

١- إن $gof: M \to P$ تشاكل مودولي

البرهان

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall x, y \in M$$
$$\Rightarrow (gof)(\alpha x + \beta y) = g\big(f(\alpha x + \beta y)\big)$$
$$= g\big(\alpha f(x) + \beta f(y)\big) = \alpha\big(g(f(x))\big) + \beta\left(g(f(y))\right)$$
$$= \alpha\big(gof(x)\big) + \beta\big(gof(y)\big)$$

أي أن gof تشاكل مودولي

٢- إذا كان كل من g, f غامر فإن gof غامر
٣- إذا كان كل من g, f متباين فإن gof متباين
٤- إذا كان gof غامر فإن g غامر
٥- إذا كان gof متباين فإن f متباين

مبرهنة : إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات غير خالية وكان $f: A \to B$ و $g: A \to C$ تطبيق فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

١- يوجد تطبيق $h: B \to C$ بحيث $hof = g$
٢- إذا كان $x, y \in A$ وكان $f(x) = f(y)$ فإن $g(x) = g(y)$

الإثبات :

$(1) \Leftarrow (2)$: نفرض لدينا $h: B \to C$ حيث $hof = g$ وليكن $x, y \in A$ حيث $f(x) = f(y)$

ولنبرهن ان $g(x) = g(y)$ لكن $g(x) = (hof)(x) = h\big(f(x)\big)$

$$= h\big(f(y)\big) = (hof)(y) = g(y)$$

$(2) \Leftarrow (1)$ لنأخذ المجموعة $G = \{f(x), g(x) \ : \forall x \in A\}$

نلاحظ أن $G \neq \emptyset$ وأنه $\forall y = f(x) \in Im(f)$ و إن $Z = g(x) \in C$ وإن العنصر Z وحيد لأنه بفرض وجود $x, x' \in A$ حيث

$$z' = g(x') \text{ و } z = g(x) \,, y = f(x) = f(x')$$

وحسب الفرض: $\Leftarrow z = z'$ وبالتالي العلاقة : $t: Im(f) \to C$ معرف $f(x) \longmapsto g(x)$ هو تطبيق ولنأخذ التطبيق $h: B \to C$ المعرف

$$h(y) = \begin{cases} t(y) & : y \in Im(f) \\ c_0 \in C & : y \notin Im(f) \end{cases}$$

كما أنه من أجل $x \in A$ يكون $(ho)(x) = h\big(f(x)\big) = t\big(f(x)\big)$

$$= g(x) \Rightarrow hof = g$$

حل الوظيفة : ٢- إذا كان كل من g, f غامر فإن gof غامر

٢)بما أن f و g غامر فإن

$$\forall p \in P \ ; \ \exists n \in N \ : g(n) = p$$
$$\forall n \in N \ ; \ \exists m \in M \ : f(m) = n$$

ليكن $p \in P$ ولنوجد عنصر صورته تساوي p (العنصر من M لان المطلوب ان نثبت انه غامر هو $g \circ f$ ومنطلقه هو M).

$$\exists m \in M \ : g \circ f(m) = g\big(f(m)\big) = g(n) = p$$

ومنه $g \circ f$ غامر .

٣-إذا كان كل من g, f متباين فإن gof متباين

٣)بما أن f و g متباين فإن:

$$\forall m_1, m_2 \in M : f(m_1) = f(m_2) \Longrightarrow m_1 = m_2$$
$$\forall n_1, n_2 \in N : g(n_1) = g(n_2) \Longrightarrow n_1 = n_2$$

لنفرض أن

$$g \circ f(m_1) = g \circ f(m_2) \quad : \ \forall m_1, m_2 \in M$$

$$\Longrightarrow g\big(f(m_1)\big) = g\big(f(m_2)\big)$$

وبما أن g متباين فإن $f(m_1) = f(m_2)$

وأن f متباين

$$\Longrightarrow m_1 = m_2$$

٤-إذا كان gof غامر فإن g غامر

٤)ليكن $p \in P$ ولنوجد عنصر صورته تساوي p (العنصر من N لان المطلوب ان نثبت انه غامر هو g ومنطلقه هو N) .

وبمان أن $g \circ f$ غامر فرضاً فإن يوجد $m \in M$ بحيث $g \circ f(m) = p$ أي أن $g\big(f(m)\big) = p$
ومنه يوجد عنصر $f(m) \in N$ بحيث صورته وفق g هو p ومنه g غامر

٥-إذا كان gof متباين فإن f متباين

٥)إن f متباين لان :

$$\forall m_1, m_2 \in M : f(m_1) = f(m_2)$$

وبما أن $f(m_1), f(m_2) \in N$ سنأخذ الصورة المباشرة وفق g

$$g\big(f(m_1)\big) = g\big(f(m_2)\big)$$

$$g \circ f(m_1) = g \circ f(m_2)$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{وأن } g\circ f \text{ متباين}} \quad m_1 = m_2$$

لكي ننجح علينا أولا أن نؤمن أنه بمقدورنا تحقيق النجاح

انتهت المحاضرة

إعداد : هلا همج - رغد جوده - بكر مشرف