نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الخامسة عشر ◄ عنوان المحاضرة: التكاملات المعتلة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ معايير التقارب + أمثلة.

٢ـ التكامل (بالتجزئة + تغيير المتحول).

٣ـ أمثلة .

معايير تقارب التكاملات المعتلة من النوع الأول:

(4) معيار كوشي :

الشرط اللازم والكافي لتقارب التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ هو أن يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي A_0 بحيث $A_0 \geq a$ ويتحقق ما يلي :

١-)يوجد عددان A, A' بحيث يكون $A' \geq A \geq A_0$ فإن :

$$|\emptyset(A') - \emptyset(A)| = \left|\int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^{A} f(x)dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

الإثبات :

بما أن $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارباً أي أن $\lim_{A\to\infty} \emptyset(A) = \emptyset(\infty)$ موجودة ومحدودة

وهذا يعني أنه يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد $A_0 > a$ بحيث يكون $|\emptyset(A') - \emptyset(A)| < \varepsilon$ لأجل $A' \geq A \geq A_0$ ومنه $\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| \leq \varepsilon$

وبالعكس : لكل $\varepsilon > 0$ عدد A_0 نأخذ $A_0 > Max(a,0)$ ((بحيث إذا كان A مقدار سالب فإن $a > 0$ أو ابتداءً من 0)) $|\emptyset(A') - \emptyset(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$ لأجل $A' \geq A \geq A_0$ نثبت A ونجعل A' تسعى ل ∞ ومنه $|\emptyset(\infty) - \emptyset(A)| = \left|\int_A^\infty f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

بالتالي التكامل I متقارب .

(5)معيار آبل:

لتكن $f(x), g(x)$ تابعان معرفان على المجال $[a,+\infty[$ ، ويحققان ما يلي :

١- التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارباً

٢- التابع $g(x)$ مطرد و محدود أي يوجد : $L > 0$: $|g(x)| < L$ حيث $a \leq x$.

عندئذٍ يكون التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ متقارب.

الإثبات :من مبرهنة القيمة الوسطى الثانية نجد أن :

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int_A^{\ell} f(x)\,dx + g(A')\int_{\ell}^{A'} f(x)\,dx \quad : \quad A \leq \ell \leq A'$$

ليكن $\varepsilon > 0$ وحسب الشرط (١) تقارب التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ يوجد $A_0 > Max(a,0)$ ويتحقق :

$$\left|\int_A^{\ell} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L} \quad , \quad \left|\int_{\ell}^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

بالتالي

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| \leq |g(A)|.\left|\int_A^{\ell} f(x)dx\right| + |g(A')|.\left|\int_{\ell}^{A'} f(x)dx\right|$$

$$< L\left(\frac{\varepsilon}{2L}\right) + L\left(\frac{\varepsilon}{2L}\right) = \varepsilon$$

التكامل محدد وحسب المبرهنة يكون التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ متقارب.

(6)معيار ديريكليه لدراسة تقارب تكامل معتل :

لتكن $f(x), g(x)$ تابعان معرفان على المجال $[a, +\infty[$ ، ويحققان ما يلي :

١- التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على كل مجال من الشكل $[a, A]$ حيث $A \geq a$ والتكامل $\int_a^A f(x)dx$ محدود أي $\left|\int_a^A (x)dx\right| < L$

٢- التابع $g(x)$ مطرد و يحقق أن : $lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

عندئذٍ يكون التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ متقارب.

تعريف : نقول عن التكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ إنه متقارب باطلاق إذا و فقط إذا كان التكامل $\int_a^{\infty}|f(x)dx|$ متقارباً.

مثال : ادرس التكامل : $\lambda, a > 0$: $I = \int_a^{\infty} \frac{sinx}{x^{\lambda}} dx$

نستخدم معيار ديريكليه حيث يكتب التكامل المعطى بالشكل :

$$I = \int_a^{\infty} \underbrace{Sinx}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{x^{\lambda}}}_{g(x)} dx$$

نلاحظ أن :

$$\left|\int_a^A f(x)dx\right| = \left|\int_a^A sinx\, dx\right| = |[-cosx]_a^A|$$

$$= |cosa - cosA| \underbrace{\leq}_{|x-y|\leq|x|+|y|} |cosa| + |cosA| \underbrace{\leq}_{|cos\theta|\leq 1} 1 + 1 = 2$$

و بالتالي فإن التابع $f(x) = sinx$ قابل للمكاملة على هذا المجال ، من جهة أخرى فإن التابع $g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}$ متناقص و يحقق أن $lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ بالتالي و حسب معيار ديركليه يكون التكامل

$$I = \int_1^{\infty} \frac{sinx}{x^{\lambda}} dx \quad : \lambda > 0$$

متقارباً .

ملاحظة : إن إهمال مجال محدود من بداية مجال التكامل لا يؤثر على تقارب التكامل المعتل

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ و $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)$ حيث $a_1 > a$ و f مستمر على $[a,\infty[$ متقاربان معاً أو متباعدان معاً

التكامل بطريقة التجزئة في التكاملات المعتلة :

ليكن لدينا التابعان $u(x), v(x)$ تابعين معرفين ومستمرين وقابلين للاشتقاق و مشتقاتهما مستمرة على المجال $[a,\infty[$ عندئذٍ تنص قاعدة التكامل بالتجزئة في التكاملات المعتلة من النوع الأول على ما يلي :

$$\boxed{\int_{a}^{\infty} u(x).dv(x) = [u(x)v(x)]_a^{\infty} - \int_{a}^{\infty} v(x)\,du(x)}$$

تغير المتحول في التكاملات المعتلة :

ليكن لدينا التكامل المعتل من النوع الأول : $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ عندئذٍ و بوضع $x = \varphi(t) \Leftarrow dx = \varphi'(t)dt$ فإذا كان $\varphi(a) = \alpha , \varphi(\infty) = \beta$ حيث $\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]$ عندئذٍ نكتب :

$$I = \int_{a}^{\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big).\varphi'(t)dt$$

◄ لاحظ أنه من الممكن أن تكون $\boldsymbol{\alpha = \infty \ or \ \beta = \infty}$ لذا كتبنا أن $\boldsymbol{\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]}$

تمرين :

أوجد قيمة التكامل : $\boldsymbol{I_n = \int_{0}^{\infty} t^n e^{-t} dt \quad : n \in N}$

نكامل بطريقة التجزئة إذ نفرض :

$$u = t^n \qquad \Rightarrow \quad du = nt^{n-1}dt$$
$$dv = e^{-t}dt \quad \Rightarrow v = -e^{-t}$$

فيكون :

$$I_n = \underbrace{[-t^n e^{-t}]_0^{\infty}}_{=0} + n\int_{0}^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$$

و لحساب التكامل الأخير أيضاً نطبق طريقة التكامل بالتجزئة إذ نفرض :

$$u = t^{n-1} \Rightarrow du = (n-1)t^{n-2}dt$$

$$dv = e^{-t}dt \Rightarrow v = -e^{-t}$$

و بالتالي يكون :

$$I_n = n\left(\underbrace{[-t^{n-1}e^{-t}]_0^\infty}_{0} + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt\right) = n(n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt$$

فنلاحظ أنه في البداية وصلنا إلى أن :

$$I_n = nI_{n-1}$$

و من ثم وجدنا أن :

$$I_n = n(n-1)I_{n-2}$$

لذا نكمل بطريقة التجزئة إلى أن نصل إلى :

$$I_n = n(n-1)(n-2)\dots.2.1I_0 = n!\underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-t}dt\right)}_{\substack{=0 \\ \text{ذلك من تحقق}}} = \boxed{n!}$$

حيث $\int_0^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$

تمرين:

ادرس تقارب التكامل : $a > 0$: $\int_a^\infty \frac{sinx}{x}dx$

نكامل بالتجزئة :

$$u = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{x^2}dx$$
$$dv = sinx \quad \Rightarrow \quad v = -cosx$$

ومنه :

$$I = \int_a^\infty \frac{sinx}{x}dx = \left[-\frac{cosx}{x}\right]_a^\infty - \int_a^\infty \frac{cosx}{x^2}dx = \frac{cosa}{a} - \int_a^\infty \frac{cosx}{x^2}dx$$

و التكامل الأخير متقارب بسبب ما يلي :

$$\frac{cosx}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

فحسب معيار المقارنة و لكون $\int_a^\infty \frac{1}{x^2}dx$ متقارب يكون التكامل $\int_a^\infty \frac{cosx}{x^2}dx$ متقارباً

إذاً التكامل متقارب

((عندما يتراكم عليك كل شيء وتصل الى نقطة لا تتحمل بعدها أي شيء ، احذر أن تستسلم ففي هذه النقطة سيتغير قدرك إلى الأبد))

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو

تنسيق: ولاء الأخضر♥