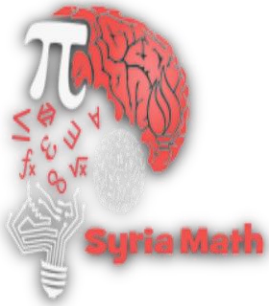

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄المحاضرة : الثامنة ◄ عنوان المحاضرة: مودول الخارج

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١-مبرهنة -توضيح

مبرهنة : إذا كان Nمودولا جزئيا من مودول M على حلقة $\mathbb{R}$ فإن M/N مودول على R بالنسبة ل $(+)$ و $(.)$ المعرفتين سابقا :

$$\forall x+N\,,y+N\in M/N$$

فإن $(x+)+(y+N)=(x+y)+N$

و$a(x+N)=(ax)+N$

وإن التطبيق$\pi: M\to M/N$ المعرفة ب$\pi(x)=x+N$

تشاكل مودولي غامر ونواته N

الإثبات :

من جهة أولى : $(M/N,+)$ زمرة تبديلية لأن :

١- $(+)$ تبديلي $\forall x+N\,,y+N\in M/N$

فإن $(x+)+(y+N)=(x+y)+N$

$$=(y+x)+N$$

$$=(y+N)+(x+N)$$

٢- $(+)$ تجميعي لان : $\forall x+N\,,y+N\,,z+N\in M/N$

فإن : $[(x+N)+(y+N)]+(z+N)$

$$=[(x+y)+N]+(z+N)$$

$$=(x+y)+z+N$$

Syria Math Team

$$= x + (y + z) + N$$

$$= x + N + [(y + z) + N]$$

٣- يوجد حيادي جمعي هو $0 + N$ لأن $\forall x + N \in M/N$

فإن: $(x + N) + (0 + N) = (x + 0) + N = x + N$

٤- لكل $x + N \in M/N$ نظير جمعي هو $-x + N$ لأن :

$$(x + N) + (-x + N)$$
$$= \big(x + (-x)\big) + N = 0 + N$$

من جهة ثانية : بالنسبة لعملية الضرب :

$$\forall \alpha, \beta \in R \ , \forall x, y \in M$$

فإن :

١- $\alpha[(x + y) + (y + N)]$

$$= \alpha[(x + y) + N] = \alpha(x + y) + N$$

$$= \alpha x + ay + N = (\alpha x + N)(\alpha y + N)$$

٢- $(\alpha + \beta)(x + N) = (\alpha + \beta)x + N$

$$= (\alpha x + \beta x) + N = (\alpha x + N) + (\beta x + N)$$

٣- $\alpha[\beta(x + N)] = \alpha(\beta x + N)$

$$= (\alpha\beta)x + N$$

٤- $1_R(x + N) = 1_R x + N = x + N$

مما سبق $(M/, +, .)$ مودول على $\mathbb{R}$ ونسمي M/N مودول الخارج أو مودول القسمة Mعلى N

والأن : لنبرهن أن $\pi: M \to M/N$ تشاكل مودولي غامر ونواته N $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall x, y \in M$

فإن: $\pi(x + y) = (x + y) + N = (x + N) + (y + N) = \pi(x) + \pi(y)$

وكذلك $\pi(\alpha x) = \alpha x + N = \alpha(x + N) = \alpha\pi(x)$ و منه فان π تشاكل مودولي

وإن π غامر لأنه : $\forall x + N \in M/N$

فإنه يوجد $x \in M$ بحيث $\pi(x) = x + N$

إن نواة π تعطى ب :

$$Ker(\pi) = \{x \in M: \pi(x) = 0 \in M/N\}$$

Syria Math Team

$$= \{x \in M : \pi(x) = x + N \in M/N\}$$
$$= \{x \in M : x \in N\} = N$$

مبرهنة : إذا كان N مودول جزئي من مودول M على حلقة $\mathbb{R}$ فإنه يوجد تقابل يحافظ على الاحتواء بين مجموعة المودولات الجزئية X من M/N ومجموعة المودولات الجزئية Y من M بحيث:

$N \subseteq A \subseteq M$ (حيث A مودول جزئي من M)

الإثبات :

ليكن A مودول جزئي من M بحيث $N \subseteq A \subseteq M$ ولنأخذ المجموعة :

$$A/N = \{a + N \ : a \in A\}$$

نجد أن $\emptyset \neq A/N \subseteq M/N$ وكذلك :

$$\forall \alpha, \beta \in R \ , \forall a + N \ , b + N \in A/N$$

فإن : $\alpha(a + N) + \beta(b + N) = (\alpha a + N) + (\beta b + N) \in A/N$

$\Leftarrow$ A/N مودول جزئي من M/N

لنأخذ التطبيق : $f: Y \to X$ المعرف ب $f(A) = A/N$

نجد ان f متباين لان :

$$\forall A, B \in M \ , N \subseteq A \subseteq M$$

فإذا كان $f(A) = f(B) \Rightarrow A/N = B/N$

وبالتالي يوجد

$a \in A \ , b \in B$ بحيث : $a + N = b + N \Rightarrow a - b \in N$

$$\Rightarrow \exists n \in N$$

بحيث :

$a - b = n$ وبما أن $n \in N \subseteq B$ فإن $a \in B$

$\Leftarrow A \subseteq B$ وكذلك العلاقة

$$b = a - n \Leftarrow a - b = n$$

وكون $N \subseteq A$ إذا $A = B$ بالتالي التطبيق f متباين

Syria Math Team

f غامر لأن : $\forall p \in M/N$ فإن المجموعة

$$U = \{x \in M \ : \ x + N = p\}$$

مودول جزئي من M من جهة ثانية $\forall n \in N$ بحيث :

$$n + N = 0 + N = p$$

اي ان $n \in U$

و هذا يعني ان $f(U) = p$

وبالتالي f غامر

متباين وغامر $\Leftarrow$ تحقق المطلوب

ما لم تبدأه اليوم لن تكمله في الغد

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – رغد جودة – بكر مشرف

Syria Team