نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة: الثانية عشر ◄ عنوان المحاضرة: عوامل التكميل

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- طرق اخرى لإيجاد عوامل التكميل

٢- حل المعادلات التفاضلية الخطية بواسطة عوامل التكميل

لتكن لدينا المعادلة:

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0 \ldots (1)$$

إذا كانت المعادلة (1) غير تامة و غير متجانسة من الشكل:

$$x.M(x,y) + y.N(x,y) \neq 0$$

عندئذٍ عامل التكميل يكون من الشكل:

$$\mu = \frac{1}{M.x + N.y}$$

أمّا إذا كانت المعادلة (1) غير تامة و غير متجانسة من الشكل:

$$x.M(x,y) + y.N(x,y) \neq 0$$

وكانت المعادلة المعطاة بالشكل:

$$x.f_1(x,y).dx + y.f_2(x,y).dy = 0$$

عندئذٍ عامل التكميل يكون من الشكل:

$$\mu = \frac{1}{Mx - Ny}$$

مثال توضيحي:

أوجد عامل التكميل للمعادلة التفاضلية ثمّ أوجد الحل العام لها:

$$(x^2y-2xy^2).dx-(x^3-3x^2y).dy=0\ ...\ (*)$$

الحل:

لنبرهن أنها تامة أم لا:

$$M(x,y)=x^2y-2xy^2 \Rightarrow \frac{dM}{dy}=x^2-4xy$$

$$N(x,y)=-x^3+3x^2y \Rightarrow \frac{dN}{dx}=-3x^2+6xy$$

أي أنّ المعادلة التفاضلية ليست تامة ونلاحظ أنها متجانسة أي أنّها من الحالة الأولى لنتحقق من الشرط الثاني ألا وهو:

$$x.M(x,y)+y.N(x,y)\neq 0$$

$$\Rightarrow x.M(x,y)+y.N(x,y)=x^3y-2x^2y^2-x^3y+3x^2y^2b=x^2y^2\neq 0$$

أيّ أنّ الشرط محقق ومنه يكون عامل التكميل:

$$\mu=\frac{1}{M.x+N.y}\Rightarrow \mu=\frac{1}{x^2y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة (*) ب μ :

$$\frac{x^2y-2xy^2}{x^2y^2}.dx-\left(\frac{x^3}{x^2y^2}-\frac{3x^2y}{x^2y^2}\right).dy=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{x}\right).dx-\left(\frac{x}{y^2}-\frac{3}{y}\right).dy=0$$

أصبحت المعادلة التفاضلية تامة والآن لنوجد الحل العام:

$$F(x,y) = \int M(x,y).dx + \varphi(y)$$

$$= \int (\frac{1}{y} - \frac{2}{x}).dx + \varphi(y) = \frac{x}{y} - 2\ln x + \varphi(y)$$

نشتق جزئياً بالنسبة لـy :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - 2y\ln x + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$-\frac{x}{y^2} - 2y\ln x + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y} \Rightarrow \varphi'(y) = 2y\ln x - \frac{3}{y}$$

$$\overset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow} \varphi(y) = y^2\ln x - 3\ln y$$

نعوض قيمة $\varphi(y)$:

$$F(x,y) = \frac{x}{y} - 2\ln x + y^2\ln x - 3\ln y = c$$

مثال 2 : أوجد عامل التكميل ثمّ أوجد الحل العام:

$$y(xy + 2x^2y^2).dx + x(xy - x^2y^2).dy = 0 \ldots (*)$$

الحل:

$$M(x,y) = xy^2 + 2x^2y^3 \Rightarrow \frac{dM}{dy} = 2xy + 6x^2y^2$$

$$N(x,y) = x^2y - x^3y^2 \Rightarrow \frac{dN}{dx} = 2xy - 3x^2y^2$$

أي أنّها ليست تامة وليست متجانسة ونلاحظ أنّها من الشكل:

$$x.f_1(x,y).dx + y.f_2(x,y).dy = 0$$

نبرهن أنّ $Mx - Ny \neq 0$:

$$Mx - Ny = x^2y^2 + 2x^3y^3 - x^2y^2 + x^3y^3 = 3x^3y^3 \neq 0$$

فيكون عامل التكميل من الشكل:

$$\mu = \frac{1}{M.x - N.y} = \frac{1}{3x^3y^3}$$

نضرب المعادلة (*) ب μ لتصبح تامة ثمّ نوجد الحل العام:

$$\left(\frac{xy^2 + 2x^2y^3}{3x^3y^3}\right).dx + \left(\frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y}\right).dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x}\right).dx + \left(\frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y}\right).dy = 0$$

الحل العام:

$$F(x,y) = \int M(x,y).dx + \varphi(y) = \int \frac{dx}{3x^2y} + \frac{2dx}{3x} + \varphi(y)$$

$$= -\frac{1}{3yx} + \frac{2}{3}\ln x + \varphi(y)$$

والآن نشتق جزئياً بالنسبة ل y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{3xy^2} + \frac{2}{3}y\ln x + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$\frac{1}{3xy^2} + \frac{2}{3}\, y\ln x + \varphi'(y) = \frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y}$$

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{3y} - \frac{2}{3}y\ln x \overset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow} \varphi(y) = -\frac{1}{3}\ln y - \frac{y^2}{3}\ln x$$

نعوض $\varphi(y)$ بالحل العام:

$$F(x,y) = -\frac{1}{3yx} + \frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{3}\ln y - \frac{y^2}{3}\ln x = c$$

حل المعادلات التفاضلية الخطية بواسطة عوامل التكميل:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية: $y' + p(x)y = q(x) \dots (1)$

يمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل $[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0$

وبالتالي هذه المعادلة أصبحت من الشكل: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

حيث يكون لدينا: $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = p(x)$

ومنه:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x) = \psi(x) \Rightarrow \mu = e^{\int p(x)dx}$$

"وهو عامل التكميل"

$$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

"وهو الحل العام"

اوجد الحل العام للمعادلة بواسطة طريقة عوامل التكميل:

١) $y' + y = e^{-x}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$$

والمعادلة هي من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

$$p(x) = 1 \quad , \quad q(x) = e^{-x}$$

$$\mu = e^{\int pdx} = e^{\int 1dx} = e^{x} \Rightarrow y = e^{-x}\left(\int e^{-x}.e^{x}\right)dx + c = e^{-x} + ce^{-x}$$

وهو الحل العام...

تمارين وظيفة "سيتم ادراج الحل في المحاضرة القادمة☺ "

١- $(x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1)y\,dx + (x^3y^3 - x^2y^2 - xy + 1)x\,dy = 0$

٢- $x\frac{dy}{dx} - ay = x + 1$

والى هنا أصدقائي نكون قد انهينا البحث الأول وهو المعادلات التفاضلية المحلولة بالنسبة للمشتق وسنبدأ ببحث جديد في المحاضرة القادمة ...

انتهت المحاضرة

إعداد: ماريا عبيد*عُلا الدالاتي*سارة شهاب