المحاضرة 4 + 5

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ عنوان المحاضرة: تمديد الحقول

نظري ☑
عملي ☐

2018 / 10 / 10 + 11

المحتوى العلمي:

1) مميز الحلقة   2) تمديد الحقول

3) درجة التمديد   4) مبرهنة هامة جداً

تعريف مميز الحلقة: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ندعو أصغر عدد طبيعي n يحقق $\underbrace{1_R+1_R+\dots+1_R}_{n\ \text{مرة}}=0_R$ مميز الحلقة R ونرمز له ب

$car(R)=n$ أو $ch(R)=n$

مثال $\boxed{1}$ لتكن $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}},+,\cdot)$ حلقة إن $car(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})=n$ لأن $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n\ \text{مرة}}\overset{(*)}{=}0$ وهو أصغر عدد طبيعي يحقق $(*)$

$\boxed{2}$ لتكن $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة مميزها 0

ملاحظة: وفي حال كان مميز الحلقة غير موجود اصطلاحاً يكون مميز الحلقة صفر.

- مثاليات $\mathbb{Z}$ هي $n\mathbb{Z}$ حيث n عدد طبيعي مثال: $0, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \dots$
- $n\mathbb{Z}$ مثالي في $\mathbb{Z}$ لذلك $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ حلقة خارج
- مميز الحقل إما صفر أو p (عدد أولي).
- ليكن K حقل عندها لنبني التشاكل

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow K$$
$$n \longmapsto f(n) = \begin{cases} \underbrace{(-1)+(-1)+\dots+(-1)}_{(-n)\ \text{مرة}} & n<0 \\ \underbrace{1_K+1_K+\dots+1_K}_{n\ \text{مرة}} & n>0 \\ 0 & n=0 \end{cases}$$

بما أن $\ker f$ مثالي في $\mathbb{Z}$ إذاً

$$\exists n \in \mathbb{N} : \ker f = n\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} : f(m) = 1 + \cdots + 1 = 0\}$$

ندعو n بمميز الحقل K عندها نميز حالتين:

- $n=0$ (المميز يساوي الصفر) عندها f متباين لأن $\ker f = 0\mathbb{Z} = 0 \Leftarrow$ إذاً يوجد

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f \text{ متباين}"] \arrow[d] & K \\ \mathbb{Q} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\tilde{f} : \mathbb{Q} \longrightarrow K$$
$$\frac{a}{b} \longmapsto \tilde{f}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{f(a)}{f(b)} \in K$$

بما أن $f(b) \neq 0$ لأن: $b \neq 0 \xRightarrow{\text{f متباين}} f(b) \neq f(0) = 0$

بما أن $\tilde{f}$ تشاكل وضوحاً و $\tilde{f}$ متباين لأن f متباين (وضوحاً)

ومنه $\tilde{f} : \mathbb{Q} \longrightarrow K$ تشاكل متباين وبالتالي يحقق المطابقة

بين $\mathbb{Q} \cong \tilde{f}(\mathbb{Q})$ عندها يمكن اعتبار $\mathbb{Q}$ حقل جزئي من K.

نتيجة

إذا كان K حقل مميزه صفر عندها يوجد تشاكل متباين من $\mathbb{Q}$ إلى K ويمكن اعتبار $\mathbb{Q} \subset K$ أي:

أي حقل مميزه صفر يحوي $\mathbb{Q}$

- $n=p$ (عدد أولي) عندها $\ker f = p\mathbb{Z}$

إذاً يوجد تشاكل ملحق

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & K \\ \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

π تشاكل الغمر القانوني

$$\tilde{f} : \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \longrightarrow K$$
$$\alpha + p\mathbb{Z} \longmapsto \tilde{f}(\alpha + p\mathbb{Z}) = f(\alpha)$$

وكون $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقل (لأن p أولي) إذاً $\tilde{f}$ متباين

"حسب ملاحظة في الحلقة الثالثة" ومنه بالمطابقة بين $\tilde{f}\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)$ و $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

نجد أن أي حقل مميزه عدد أولي يحوي $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

نرمز ب $\mathbb{F}_p$ ل $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$

خلاصة القول: إذا كان لدينا حقل K

$Car K = 0 \Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq K$

$Car K = p \Rightarrow \mathbb{F}_p \subseteq K$

* نسمي $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{F}_p$ حيث p عدد أولي حقول أولية (بدائية).

مثال: ليكن K حقل مميزه p عندها $(a+b)^p = a^p + b^p$

فمثلاً K حقل مميزه 2 عندها

$a, b \in K \; ; \; (a+b)^2 = a^2 + b^2 + \underbrace{2a.b}_{0} = a^2 + b^2$

تعريف تمديد الحقول: ليكن F و K حقلان عندها نقول أن F ممدد لـ K إذا وجد تشاكل f منطلقه K ومستقره F $(f: K \to F)$ بالمطابقة بين K و $f(K)$ يمكن اعتبار أن K حقل جزئي من F وفق قوانين التشكيل المعرفة على F.

- إذا كان F ممدد لـ K عندها نكتب $K \subseteq F$

أمثلة: 1) أي حقل مميزه 0 هو ممدد لـ $\mathbb{Q}$

2) أي حقل مميزه p هو ممدد لـ $\mathbb{F}_p$

3) $\mathbb{R}$ ممدد لـ $\mathbb{Q}$

4) $\mathbb{C}$ ممدد لـ $\mathbb{R}$

5) $\mathbb{C}$ ممدد لـ $\mathbb{Q}$

تعريف درجة التمديد: ليكن K و F حقلان ليكن K ممدد لـ F أي $F \subseteq K$ ويمكن اعتبار K فضاء شعاعي على F حيث نحافظ على قانون التشكيل الأول المعرف على K أما بالنسبة لقانون التشكيل الخارجي نعرفه كما يلي

$$\lambda \in F , \; v \in K \; : \; \underset{\in F}{\lambda} \cdot \underset{\in K}{v} = \underset{\in K}{f(\lambda)} \cdot \underset{\in K}{v}$$

قانون تشكيل خارجي مجموعة مؤثراته F

قانون تشكيل الداخلي المعرف على K.

حيث $f : F \longrightarrow K$ تشاكل متباين

ندعو بعد الفضاء K على F $(\dim_F K)$ بدرجة تمديد K على F ونرمز

لها ب $\dim_F K = [K : F]$

مثال: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ تمديد لـ $\mathbb{R}$ لأن $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

إذاً $\mathbb{C}$ تمديد لـ $\mathbb{R}$ بدرجة تمديد تساوي 2 $\Leftrightarrow$ $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$

تعريف التمديد المنتهي: ليكن K تمديد للحقل F. عندها K

تمديد منتهي لـ F إذا كان $[K : F] < +\infty$ وبخلاف

ذلك ندعو K تمديد غير منتهي للحقل F.

مثال: • $\mathbb{C}$ تمديد منتهي لـ $\mathbb{R}$

• $\mathbb{R}$ تمديد غير منتهي لـ $\mathbb{Q}$

• $\mathbb{C}$ تمديد غير منتهي لـ $\mathbb{Q}$

مبرهنة تطبيقها مهم جداً

ليكن K حقل ولتكن $f(x) \in K[x]$ حدودية غير

خزولة على K بدرجة $\deg f = n$ عندها:

$\boxed{1}$ $\frac{K[x]}{(f(x))}$ حقل ممدد لـ K

$\boxed{2}$ درجة التمديد لـ $\frac{K[x]}{(f(x))}$ على K تساوي درجة الحدودية

$f(x)$ أي $\left[\frac{K[x]}{(f(x))} : K\right] = n$.

$\boxed{3}$ يحوي $\frac{K[x]}{(f(x))}$ صفر للحدودية $f(x)$.

البرهان قبل البدء بالبرهان سنقوم بتذكرة:

• R حلقة و I مثالي في R لأن $R/I = \{ r + I \; ; \; r \in R \}$ حلقة

• يُعرف تشاكل الغمر القانوني $\pi : R \longrightarrow \frac{R}{I}$

$r \longmapsto r + I$

• R حلقة، $a\in R$ عندها $aR=(a)=\langle a\rangle=\{a.b : b\in R\}$
مثالي رئيسي مولد ب a.

• R حلقة و I مثالي أولي عندها R/I منطقة تكاملية.

• R حلقة و I مثالي أعظمي عندها R/I حقل.

ولنبدأ بالبرهان: $\boxed{1}$ إن $K[x]/(f)$ حقل لأن:
$I=(f)$ مثالي أعظمي في مجموعة كل المثاليات الرئيسية لكن
$K[x]$ حلقة رئيسية إذاً $I=(f)$ مثالي أعظمي للحلقة $K[x]$
ومنه $K[x]/(f)$ حقل.

• $K[x]/(f)$ ممدد ل K لأن: لنبني التشاكل

$$K \xrightarrow{i} K[X] \xrightarrow{\pi} \frac{K[x]}{(f)}$$

$$a \mapsto a$$

$$X \mapsto X+I=x$$

إن $\pi\circ i : K \longrightarrow \frac{K[x]}{(f)}$ تشاكل متباين (لأن K حقل)
$\Leftarrow$ $K[x]/(f)$ ممدد ل K.

$\boxed{2}$ لنبرهن $\left[\frac{K[x]}{(f)} : K\right]$ تمديد منتهي من الدرجة n، إن:

$\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ قاعدة ل $K[x]/(f)$ على K و السبب:

- $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ مستقلة خطياً لأن:

$$\alpha_0 1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1} \overset{(*)}{=} 0$$

ومنه توجد $g(X)=\alpha_0+\alpha_1 X+\alpha_2 X^2+\cdots+\alpha_{n-1}X^{n-1}$
حدودية في $K[X]$ تحقق:

$$\pi(g(X))=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}$$

ولكن حسب $(*)$ نجد $\pi(g(X))=0$ أي
$g(X)\in \ker\pi$ لكن $\ker\pi=(f)$ إذاً $g(X)\in(f)$
هذا يعني أنه $\exists\, h(X)\in K[X] ; g(X)=h(X).f(X)$

لكن $n-1 = deg(g) > deg(f) = n$

وهذا غير ممكن إلا إذا كانت $g(X) = 0$ أي $\alpha_0 = \alpha_1 = --- = \alpha_{n-1} = 0$

- إذن $\{1, x, ---, x^{n-1}\}$ مولدة لـ $\frac{K[x]}{(f)}$ على K

لتكن $g(x) \in \frac{K[x]}{(f)}$ عندها نميز حالتين:

- $deg(g) \leq n-1$ وهذا يعني $g(x)$ تركيب خطي بدلالة $\{1, x, ---, x^{n-1}\}$.

- $deg(g) \geq n$ إذن $g(x) \in \frac{K[x]}{(f)} \Leftarrow$

$\exists g(X) \in K[X] : \pi(g(x)) = g(x)$

إذاً توجد $g(X)$ في $K[X]$ لها نفس درجة $g(x)$ وتحقق $\pi(g(x)) = g(x)$

ومنه $\left\{ \begin{array}{l} K[X] \xrightarrow{\pi} \frac{K[x]}{(f)} \\ g(X) \longmapsto g(x) \end{array} \right. \Leftarrow f(X), g(X) \in K[X]$

وحسب خوارزمية القسمة في $K[X]$ نجد $\exists q(X), r(X) \in K[X]$

بحيث $g(X) \overset{(**)}{=} q(X) \cdot f(X) + r(X)$ حيث $r(x)$ إما أن تساوي الصفر

أو $deg(r(x)) < deg(f(x)) = n$ نصور $(**)$ وفق π فنجد

$g(x) = 0 + r(x)$ لأن $q(x), f(x) \in (f) = 0_{\frac{K[x]}{(f)}}$ ولكن

$r(X)$ من الدرجة أصغر من $n \Leftarrow r(x)$ تركيب خطي لـ

$\{1, x, ---, x^{n-1}\}$ إذاً كتبت $g(x)$ على شكل تركيب خطي بدلالة

$\{1, x, ---, x^{n-1}\}$.

$\boxed{3}$ $\frac{K[x]}{(f)}$ يملك صفر لـ $f(x)$ لأن

$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + --- + a_0 \in K[X]$

$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + --- + a_0$

$= (X+I)^n + a_{n-1}(X+I)^{n-1} + --- + a_0$

$= \underbrace{(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + --- + a_0)}_{f(X)} + \underset{(f)}{\underset{\shortparallel}{I}} = (f) = 0_{\frac{K[x]}{(f)}}$

"حسب خواص الأصناف" وبذلك يتم البرهان ....

انتهت المحاضرة .... إعداد: وشهد الملك البوشي